Université Assane Seck de Ziguinchor. UFR Sciences et Technologies.

Département de Mathématiques.

# Stabilité des systèmes linéaires commutés plans.

par
**Kindy Ba.**

*Mémoire de Master 2 de Mathématiques et Applications.*

Co-encadré par Dr. Daouda Niang Diatta.
Sous la supervision de Pr. Marie-Salomon Sambou.
*Soutenu le samedi 25 févirer 2017.*

**Jury :**

| | | |
|---|---|---|
| Marie-Salomon Sambou | Professeur Titulaire | Président du jury. |
| Moussa Balde | Maître de Conférences CAMES | Examinateur |
| Daouda Niang Diatta | Maître Assistant CAMES | Co-encadreur. |
| Diène Ngom | Maître Assistant CAMES | Examinateur. |
| Timack Ngom | Maître Assistant CAMES | Examinateur. |

# Table des matières

# Remerciements

Je tiens à témoigner ma reconnaissance en ALLAH, le Tout Miséricordieux, le Très Miséricordieux de m'avoir donner le courage et la force de mener à terme ce projet qui m'a ouvert les portes du savoir sur les systèmes hybrides.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et sincères remerciements à mes encadreurs PR. MARIE-SALOMON SAMBOU et DR. DAOUDA NIANG DIATTA, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en assurant la direction et le suivi scientifique et technique, pour leur grande contribution à l'aboutissement de ce présent mémoire. Je vous remercie pour votre précieuse présence assistance, votre disponibilité et l'intérêt que vous avez manifésté pour ce travail. Je vous remercie pour vos orientations et votre enthousiasme envers mon travail. Je vous suis très reconnaissant pour la confiance que vous m'avez témoigné tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Je tiens à vous remercier pour tout, car vous m'avez appris beaucoup plus que les mathématiques...Merci Messieurs de m'avoir pris sous votre aile.

Je remercie vivement PR. MARIE-SALOMON SAMBOU pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire. Je le remercie chaleureusement pour sa participation à ma formation.

Mes remerciements s'adressent aussi au DR. DIÈNE NGOM qui est toujours là à répondre à mes questions, pour sa contribution à ma formation et en acceptant de juger mon travail.

Je tiens également à exprimer mes vifs remerciements au DR. TIMACK NGOM, pour sa contribution à ma formation et en acceptant de juger et d'évaluer mon travail.

Mes remerciements s'adressent aussi à tous mes professeurs qui ont contribué à ma formation depuis mes premiers pas à l'école, qu'ils (elles) trouvent ici l'expression de toute ma gratitude.

Enfin, je rend hommage à mon père et ma mère qui n'ont pas eu la chance de me voir évoluer à l'école. Je demande le Tout Puissant de les accueillir dans son paradis. C'est donc à eux que je dédie ce travail de mémoire. Merci Papa et Maman. Je terminerai cet avant propos en remerciant mon frère aîné MAMADOU KORKA qui m'a fait entré à l'école, mes frères MAMADOU ALIOU, SOULEYMANE, ABDOURAHIM, MAMADOU CHERIF et mes soeurs FATOUMATA, OUMOU HAWA et MOUSSADIÉ qui ont été toujours là pour moi. Je voudrais remercier particulièrement mes deux mamans DIENABOU DIALLO co-épouse de ma maman et MAIMOUNA BA sa soeur. Je leur exprime mes hauts et profonds signes de reconnaissances et d'obéissance pour tous les efforts qu'ils ont fournis et tous les sacrifices qu'ils ont généreusement faits, pour que je grandisse dans de parfaites conditions d'amour, de satisfaction et d'épanouissement. Enfin, je remercie très chaleureusement mes deux amis et frères CHEIKH DIOP et BAILA SY, pour leur générosité, leur affection et les précieux conseils. Je souhaite aussi dire un grand merci à tous mes amies et amis

Mr. Loum, Iréne Mendy, Mame Mbaye, Zaîd Diallo, Oumar Bah, Saîdou Diallo, Racine, Fahad, Coumba Sow, Soukeye Seydy, Zaînab Diallo, Mbocoum, Ousmane Mboup, Amadou Seydy, Oulymata, Mouhamadou Sall, Mamadou Bah, Diba, Ibrahima Drame, Aboubacar Bayo, Omar Biaye.

# Introduction

Les systèmes dynamiques qui sont décrits par une interaction entre une dynamique continue et une dynamique discrète sont appelés des systèmes hybrides. La dynamique continue peut être représentée par un système de commande en temps continu, comme un système linéaire $x' = A\,x + Bu$, $x \in \mathbb{R}^n$,$A \subset \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \subset \mathbb{R}^{n\times m}$ et le contrôle $u \in \mathbb{R}^m$; $n, m \in \mathbb{N}$. Comme exemple de dynamique discrète, on peut citer un automate à état-fini, où l'état $q$ prend ses valeurs dans un certain ensemble fini $Q$, et les transitions entre les différents états discrets sont déclenchées par les valeurs appropriées d'une variable $v$. Quand la dynamique continue $x$ est une fonction de la dynamique discrète $q$ et vice versa, on parle de système dynamique hybride [11]. Les systèmes hybrides ont de nombreuses applications et dans divers domaines. Nous pouvons citer comme exemples d'applications le contrôle de systèmes mécaniques, la commande de processus dans l'industrie automobile, le contrôle automatique d'aéronef dans l'aviation, etc. Ainsi, les systèmes hybrides ont été étudiés dans les cinquante dernières années, d'abord par des chercheurs en informatique et automatique et plus récemment par des mathématiciens spécialiste de la théorie du contrôle.

Notre travail concerne une classe particulière de systèmes dynamiques hybrides qui sont obtenus en négligeant les détails du comportement discret d'un système hybride. La question de base dans ce contexte est l'analyse de la stabilité asymptotique d'un tel système. L'étude de la stabilité d'un système hybride permet d'explorer plusieurs phénomènes intéressants que l'on ne rencontre pas dans les cas de dynamiques purement continues ou purement discrètes. Par exemple, partant de sous-systèmes continus, tous asymptotiquement stables, on peut construire une dynamique discrète conduisant à un sytème hybride avec des trajectoires divergentes. Un autre fait remarquable, est que l'on peut soigneusement commuter entre des sous-systèmes continus tous instables et aboutir à une trajectoire convergente. La stabilité d'un système hybride dépend non seulement de la stabilité de chaque sous-système continu, mais aussi des propriétés de la dynamique discrète. Ainsi l'étude de la stabilité de systèmes hybrides est en général divisée en deux types de problèmes :

- l'analyse de stabilité de systèmes hybrides sous des signaux de commutation donnés (peut-être arbitraire, commutation lente, etc);
- la synthèse des lois de commutations stabilisantes (correcteurs) pour une collection donnée de systèmes dynamiques.

Dans [4] Balde, Boscain et Masson ont étudié le problème de stabilité des systèmes commutés linéaires dans le plan de la forme :

$$x'(t) = u(t)A_1x(t) + (1 - u(t))A_2x(t)$$

où les matrices réelles $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sont de valeurs propres à parties réelles négatives et $u\colon [0; +\infty] \longrightarrow \{0, 1\}$ est une fonction mesurable. Ils ont donné des conditions nécessaires et suffisantes, dépendant d'invariants des matrices $A_1$ et $A_2$, sous lesquelles le système est asymptotiquement stable pour des fonctions de commutation arbitraires $u$. Ils ont simplifié, unifié ces conditions de stabilités en les reformulant en termes de nouveaux paramètres et aussi réduit les cas à étudier de 20 à 4. La plupart de ces cas sont analysés en termes de la fonction :

$$\Gamma(A_1, A_2) = \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(A_1)\mathrm{Tr}(A_2) - \mathrm{Tr}(A_1 A_2)).$$

L'objectif de ce mémoire est de s'initier aux systèmes dynamiques hybrides par l'étude détaillée des concepts et résultats de l'article [4] de M. Balde, U. Boscain et P. Masson.

Le premier chapitre concentre des résultats classiques sur les équations différentielles ordinaires (EDO) et sur certaines fonctions utiles pour l'étude de la stabilité des points d'équilibre d'une EDO. Nous y rappelons les définitions des notions de stabilité d'un compact non vide de $\mathbb{R}^n$ et de stabilité au sens de Lyapunov.

Le deuxième chapitre commence par une présentation des systèmes commutés ainsi que les problèmes de stabilité correspondants. Ensuite nous y étudions la stabilité de ces systèmes quelle que soit la loi de commutation. Nous le terminons par une étude des lois de commutations stabilisantes.

Le troisième chapitre est une étude détaillée des résultats de l'article [4] abordant les notions de stabilisé des systèmes commutés dans le plan et leurs conditions de stabilité.

# Chapitre 1

# Notions de stabilité pour une équation différentielle ordinaire

## 1.1 Introduction

Ce chapitre concentre des résultats classiques sur les équations différentielles ordinaires (EDO) et sur certaines fonctions utiles pour l'étude de la stabilité des points d'équilibre d'une EDO. Nous y rappelons également les définitions des notions de stabilité d'un compact non vide de $\mathbb{R}^n$ et de stabilité au sens de Lyapunov.

### 1.1.1 Quelques rappels sur les équations différentielles ordinaires

Une équation différentielle ordinaire est une équation de la forme

$$F(t, x, x', ..., x^{(k)}) = 0$$

où $x$ est la fonction inconnue de la variable réelle $t$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $x'$,..., $x^{(k)}$ désignent les dérivées successives de $x$, et $F$ est une fonction donnée, supposée continue sur $I \times \Omega \times \Omega_1 \times .... \times \Omega_k$ où $I$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\Omega$, $\Omega_1$..., $\Omega_k$ sont des ouverts connexes de $\mathbb{R}^n$. On ne s'intéressera dans ce mémoire qu'à des équations différentielles résolues, pour lesquelles il existe une fonction $G$, régulière sur $I \times \Omega \times \Omega_1 \times .... \times \Omega_{k-1}$ telle que :

$$F(t, x, x', ..., x^{(k)}) = 0 \iff x^{(k)} = G(t, x, x', ..., x^{(k-1)}).$$

On observe de plus que

$$x^{(k)} = G(t, x, x', ..., x^{(k-1)}) \Longleftrightarrow X' = \mathcal{G}(t, X)$$

avec

$$X := \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(k-1)} \end{pmatrix} \text{et}\, \mathcal{G}(t, X) := \begin{pmatrix} 0 & I & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & I \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ G(t, x, x', ..., x^{(k-1)}) \end{pmatrix},$$

comme $G$ est régulière, donc la fonction $\mathcal{G}$ est aussi régulière. On supposera donc sans perte de généralité $k = 1$.

Désormais on considère « une» équation dite d'ordre 1 de la forme

$$x' = \boldsymbol{f}(t, x) \tag{1.1}$$

où $x$ est une fonction inconnue de la variable réelle $t$ à valeurs $\mathbb{R}^n$, et $f$ une application continue définie par :

$$\boldsymbol{f}: I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

où $I \times \Omega$ est un ouvert connexe non vide de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Lorsque $f$ ne dépend pas de $t$, l'équation différentielle est dite **autonome** et on a :

$$x' = \boldsymbol{f}(x) \tag{1.2}$$

Commençons par préciser la notion de solution :

→ On appelle solution de (1.1) une fonction $x$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $J \subset I$ et à valeurs dans $\Omega$, dont la dérivée vérifie

$$\forall t \in J, x'(t) = f(t, x(t)).$$

→ On appelle *condition initiale* une égalité de la forme $x(t_0) = x_0$ avec $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$.

→ On appelle problème de Cauchy le système d'équations

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \forall t \in I \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

→ Résoudre le problème de Cauchy (localement) revient à trouver un intervalle $J \subset I$ contenant $t_0$ et une fonction $x$ dérivable sur $J$ telle que :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \forall t \in J \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

→ Nous noterons $(J, x(t, t_0, x_0))$ une solution locale du problème de Cauchy de données initiales $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ où $J$ est un sous-intervalle de $I$.

La proposition suivante introduit la forme intégrale du problème de Cauchy.

**Proposition 1.1.** *Un couple $(J, x(t, t_0, x_0))$ est solution du problème de Cauchy si et seulement si, il satisfait l'équation intégrale suivante :*

$$\forall t \in J, x(t, t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) \mathrm{ds}$$

Soit $\mathcal{A} \subset \Omega$, $\varepsilon > 0$, on définit la boule centrée en $x$ et de rayon $\varepsilon$ par :

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in \Omega; \|y - x\| < \varepsilon\} \quad \text{et} \quad B_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathcal{A}) = \cup_{x \in \mathcal{A}} B(x, \varepsilon)$$

**Définition 1.2. (Lipschitz locale)** *Soit $\boldsymbol{f}$: $I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$. On dit que $\boldsymbol{f}$ est localement lipschitzienne en la deuxième variable, si pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $(t_0, x_0)$ et une constante $c > 0$ tel que $\forall ((t, x_1), (t, x_2)) \in \mathcal{V}^2$, $\|\boldsymbol{f}(t, x_1) - \boldsymbol{f}(t, x_2)\| \leq c\|x_1 - x_2\|$.*

**Théorème 1.3. (Cauchy-Lipschitz)** *On suppose $f \in \mathcal{C}(I \times \Omega, \mathbb{R}^n)$ localement lipschitzienne par rapport à $x$.*

***Existence :*** *Quel que soit* $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$*, il existe* $\tau > 0$ *et* $x \in \mathcal{C}^1(J, \Omega)$ *solution du problème de Cauchy avec* $J = [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$*.*

***Unicité :*** *Si* $y$ *est une autre solution, elle coïncide avec* $x$ *sur un intervalle d'intérieur non vide inclus dans* $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$*.*

***Régularité :*** *Si* $f$ *est de classe* $\mathcal{C}^r$*,* $r \geqslant 0$*, alors* $x$ *est de classe* $\mathcal{C}^{r+1}$*.*

**Définition 1.4. (Prolongement de solution locale)** *Si* $(J, x(t, t_0, x_0))$ *et* $\left(\tilde{J}, \tilde{x}(t, t_0, \tilde{x_0})\right)$ *sont des solutions locales du problème de Cauchy, on dit que* $\left(\tilde{J}, \tilde{x}(t, t_0, \tilde{x_0})\right)$ *prolonge* $(J, x(t, t_0, x_0))$ *si* $\tilde{J}$ *contient* $J$ *et* $x(t; t_0, x_0)$ *coïncide avec* $\tilde{x}(t, t_0, \tilde{x_0})$ *sur J; dans ce cas on dit aussi que* $(J, x(t, t_0, x_0))$ *est la restriction de* $\left(\tilde{J}, \tilde{x}(t, t_0, \tilde{x_0})\right)$*.*

**Définition 1.5. (Solution maximale)** *Une solution locale* $(J,\ x(t,\ t_0,\ x_0))$ *du problème de Cauchy est dite maximale si elle n'a pas d'autre prolongement qu'elle même.*

Le théorème de Cauchy-Lipschitz fournit des solutions locales. L'unicité de ces solutions permet de démontrer le résultat suivant.

**Théorème 1.6. (Cauchy-Lipschitz)** *On suppose* $f \in \mathcal{C}(I \times \Omega, \mathbb{R}^n)$ *et localement lipschitzienne par rapport à* $x$*. Alors il existe une unique solution maximale* $(J, x(t, t_0, x_0))$ *au problème de Cauchy, qui est définie sur un intervalle* $J$ ***ouvert****.*

**Définition 1.7. (Point d'équilibre)** *Soit* $x_0 \in \Omega$*. On dit que* $x_0$ *est un point d'équilibre(solution stationnaire, point critique) de l'équation* (1.2)*, si* $x_0$ *est solution de l'équation* $f(x) = 0$*.*

Cette définition s'explique par la simple observation que si $\boldsymbol{f}(x_0) = 0$ alors la fonction constante $x(t) = x_0$ est solution du problème (1.2).

### 1.1.2 Fonctions de classe $\mathcal{K}$, définies positives, illimitées, decrescentes

Dans cette sous-section, nous rappelons les définitions et premières caractérisations des fonctions de classe $\mathcal{K}$, définies positives, radialement non bornées, decrescente. Ces fonctions vont être utilisées pour la caractérisation de la stabilité asymptotique et uniforme des systèmes. Les preuves des résultats de cette sous-section peuvent être consultées dans [6].

#### 1.1.2.1 Fonctions de classe $\mathcal{K}$

**Définition 1.8.** *Soit* $a \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $\varphi\colon [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *une application continue, on dit que* $\varphi$ *appartient à la classe* $\mathcal{K}$ *si :*

- $\varphi$ *est strictement croissante,*
- $\varphi(0) = 0$*.*

**Définition 1.9.** *Soit* $\varphi\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *une application continue, on dit que* $\varphi$ *appartient à la classe* $\mathcal{K}^\infty$ *si :*

- $\varphi$ *est de classe* $\mathcal{K}$*,*

- $\lim_{r \longrightarrow +\infty} \varphi(r) = +\infty$

**Exemple 1.10.**

- La fonction $\varphi$ définie par $\varphi(r) = \arctan(r)$ est strictement croissante car $\varphi'(r) = \frac{1}{1+r^2} > 0$ et $\varphi(0) = 0$. Ainsi, $\varphi$ appartient à la classe $\mathcal{K}$, mais $\varphi$ n'appartient pas à la classe $\mathcal{K}^\infty$ car $\lim_{r \longrightarrow +\infty} \varphi(r) = \frac{\pi}{2}$.
- Soient $c > 0$ et $\varphi$ définie par $\varphi(r) = r^c$ est strictement croissante car $\varphi'(r) = c r^{c-1} > 0$ et $\varphi(0) = 0$. De plus, $\lim_{r \longrightarrow +\infty} \varphi(r) = +\infty$, donc $\varphi$ appartient à la classe $\mathcal{K}^\infty$.

**Définition 1.11.** *Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et*

$$\beta\colon \begin{cases} [0, a] \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (r, s) \longmapsto \beta(r, s) \end{cases}$$

*une application continue, on dit que $\beta$ appartient à la classe $\mathcal{KL}$ si :*

- *pour tout $s \in \mathbb{R}^+, r \longmapsto \beta(r, s)$ appartient à la classe $\mathcal{K}$,*
- *pour tout $r \in [0, a], s \longmapsto \beta(r, s)$ est décroissante,*
- *pour tout $r \in [0, a], \lim_{s \longrightarrow +\infty} \beta(r, s) = 0$.*

**Exemple 1.12.** Soit $k > 0, \beta$ définie par $\beta(r, s) = \frac{r}{ksr + 1}$ est strictement croissante en $r$ car $\frac{\partial \beta(r, s)}{\partial r} = \frac{1}{(ksr + 1)^2} > 0$ et strictement décroissante en $s$ car $\frac{\partial \beta}{\partial s}(r, s) = \frac{-kr^2}{(ksr + 1)^2} < 0$ et pour tout $s \in \mathbb{R}^+$, $\beta(0, s) = 0$. De plus $\lim_{s \longrightarrow +\infty} \beta(r, s) = 0$. Ainsi $\beta$ appartient à la classe $\mathcal{KL}$.

#### 1.1.2.2 Fonctions (semi)-définies positives

**Définition 1.13. ((Semi)-définie positive)** *Une fonction $v\colon I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite semi-définie positive (respectivement semi-définie négative), s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 tel que :*

- $\forall t \in I, v(t, 0) = 0$;
- $\forall t \in I, \forall x \in \mathcal{V}, v(t, x) \geq 0$ *(respectivement $v(t, x) \leqslant 0$).*

*Une fonction $v\colon I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite définie positive (respectivement négative), s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 tel que :*

- *pour tout $t \in I, v(t, 0) = 0$;*
- *il existe $v_0\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie positive telle que : $\forall t \in I, \forall x \in \mathcal{V}$, $v(t, x) > v_0(x)$ (respectivement $v(t, x) < v_0(x)$)*

Dans le cas où $v$ est continue, on a la caractérisation suivante qui utilise les fonctions de classe $\mathcal{K}$.

**Proposition 1.14.** *Soit $t_0 \in I, v\colon I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $t \in I, v(t, 0) = 0$. $v$ est dite définie positive (respectivement définie négative) s'il existe un voisinage $\mathcal{V}_{t_0}$ et une fonction $\varphi$ de classe $\mathcal{K}$ telle que: $v(t, x) \geq \varphi(\|x\|)$ (respectivement $v(t, x) \leq -\varphi(\|x\|)$) $\forall (t, x) \in \mathcal{V}_{t_0}$.*

#### 1.1.2.3 Fonctions radialement non bornées ou illimitées

**Définition 1.15. (Fonction radialement non bornée)** *Une fonction* $v$: $I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *est radialement non bornée si :*

$$\lim_{\|x\| \longrightarrow +\infty} v(t,x) = +\infty$$

*uniformément en t, c'est à dire:* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $(\|x\| > \delta) \Longrightarrow (\forall t \in I$, $v(t,x) > \varepsilon)$.

Dans le cas où $v$ est continue, on a la caractérisation suivante qui utilise les fonctions de classe $\mathcal{K}^\infty$ :

**Proposition 1.16.** *Une fonction* $v$: $I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue est radialement non bornée s'il existe une fonction* $\varphi$ *de classe* $\mathcal{K}^\infty$ *telle que :*

$$v(t,x) \geq \varphi(\|x\|), \forall t \in I, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

#### 1.1.2.4 Fonctions décrescentes

**Définition 1.17. (Fonction décrescente)** *Une fonction* $v$: $I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *est décrescente si :*

$$\lim_{\|x\| \longrightarrow 0} v(t,x) = 0$$

*uniformément en t c'est-à-dire:* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$; $\forall x \in \Omega$, $(\|x\| < \delta) \Longrightarrow (\forall t \in I$, $v(t,x) < \varepsilon)$.

Dans le cas où $v$ est continue, on a la caractérisation suivante qui utilise les fonctions de classe $\mathcal{K}$ :

**Proposition 1.18.** *Une fonction* $v: I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *est décrescente si et seulement s'il existe un voisinage* $\mathcal{V}_{t_0}$ *et une fonction* $\psi$ *de classe* $\mathcal{K}$ *telle que :* $|v(t,x)| \leq \psi(\|x\|)$ $\forall (t,x) \in \mathcal{V}_{t_0}$.

**Exemple 1.19.** La fonction $v$ définie par $v(t,x) = (1 + \sin^2(t))(x_1^2 + x_2^2)$ est dominée par la fonction $\alpha(x) = 2(x_1^2 + x_2^2)$. Donc $v$ est décrescente.

## 1.2 Notions de stabilité

### 1.2.1 Stabilité pratique

**Définition 1.20. (Stabilité pratique d'un compact non vide K)** *Soit* $D_0 \subset D \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ *non vides,* $(T_s, T_f) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+$ *tels que* $T_s < T_f$*, K un compact non vide de* $\mathbb{R}^n$*, on dit que K est* $(I, T_s, T_f, D_0, D)$*-pratiquement stable pour le système, si pour tout* $x_0 \in D_0$ *et* $t_0 \in I$*, on a :*

- $x(t, t_0, x_0)$ *est définie sur* $[t_0, t_0 + T_f]$;

- $\forall t \in [t_0, t_0 + T_f]$, $x(t, t_0, x_0) \in D$;
- $\forall t \in [t_0 + T_s, t_0 + T_f]$, $x(t, t_0, x_0) \in K$.

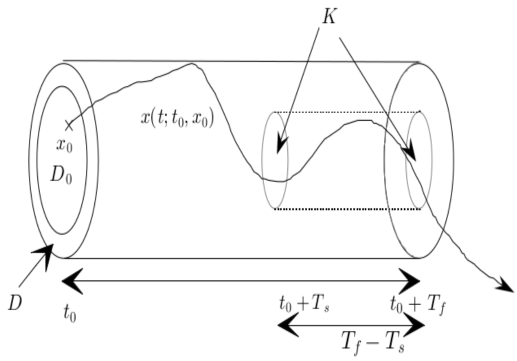


**Figure 1.1.**

Soit $K \subset \Omega$, on définit la boule centrée en $x$ et de rayon $\delta(\varepsilon, t_0)$ par :

$$B(x, \delta(\varepsilon, t_0)) = \{y \in \Omega; \|y - x\| < \delta(\varepsilon, t_0)\}$$
$$B_{\delta(\varepsilon, t_0)}(K) = \cup_{x \in K} B(x, \delta(\varepsilon, t_0))$$

**Définition 1.21. (Stabilité d'un compact non vide K)** *Soit $K$ un compact non vide de $\mathbb{R}^n$, on dit que $K$ est stable pour le système* (1.1) *si pour tout $\varepsilon > 0$, et $t_0 \in I$, il existe $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tel que :*

$$(x_0 \in B_{\delta(\varepsilon, t_0)}(K)) \Longrightarrow \begin{cases} x(t, t_0, x_0) \text{ est definie pour } t \geq t_0 \\ x(t, t_0, x_0) \in B_\varepsilon(K) \, \forall t \geq t_0 \end{cases}$$

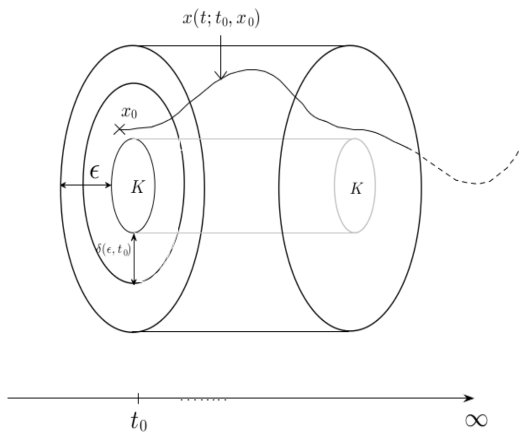


**Figure 1.2.**

**Exemple 1.22.** On considère le système : $x' = (6t\sin(t) - 2t)\, x, t \in \mathbb{R}$. Il admet des solutions de la forme :

$$\begin{aligned} x(t, t_0, x_0) &= x_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} (6\sin(s) - 2s)\mathrm{ds}\right) \\ &= x_0 \exp(6\sin(t) - 6t\cos(t) - t^2 - 6\sin(t_0) + 6t_0\cos(t_0) + t_0^2). \end{aligned}$$

Donc, le terme en exponentielle est borné pour tout $t \geq t_0$ par une constante $c(t_0)$ qui dépend seulement de $t_0$. Ainsi, on a :

$$|x(t, t_0, x_0)| \leq |x_0| c(t_0) \, \forall t \geq t_0$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, si l'on choisit $\delta = \frac{\varepsilon}{c(t_0)}$, d'où 0 est stable.

**Définition 1.23. (Domaine de stabilité de *K*)** *Soit $K$ un compact non vide de $\mathbb{R}^n$, stable pour le système (1.1). Pour tout $\varepsilon > 0$ et $t_0 \in I$, il existe un $\delta_{\max}(\varepsilon, t_0) > 0$ maximum parmi les $\delta(\varepsilon, t_0)$. On définit alors :*

- *le domaine de stabilité de $K$ par rapport à $t_0$ :*

$$\mathcal{D}_s(t_0, K) = \cup_{\varepsilon > 0} D(0, \delta_{\max}(\varepsilon, t_0))$$

  *où $D(0, \delta_{\max}(\varepsilon, t_0))$ est disque de centre 0 et de rayon $\delta_{\max}(\varepsilon, t_0)$.*

- *le domaine de stabilité de $K$ :*

$$\mathcal{D}_s(K) = \cup_{t \in I} \mathcal{D}_s(t_0, K)$$

**Définition 1.24. (Instabilité de *K*)** *Soit $K$ un compact non vide de $\mathbb{R}^n$. On considère le système (1.1), si $K$ n'est pas stable pour le système (1.1), on dit que $K$ est instable pour le système (1.1).*

### 1.2.2 Stabilité asymptotique

**Définition 1.25. (Attractivité de *K*)** *Soit $K$ un compact non vide de $\mathbb{R}^n$, on dit que $K$ est attractif pour le système (1.1) si pour tout $t_0 \in I$, il existe $\delta(t_0) > 0$ tel que :*

$$(x_0 \in B_{\delta(t_0)}(K)) \Longrightarrow \begin{cases} x(t, t_0, x_0) \text{ est définie pour } t \geq t_0 \\ \lim_{t \longrightarrow +\infty} d(x(t, t_0, x_0), K) = 0 \end{cases}$$

**Définition 1.26. (Stabilité asymptotique de *K*)** *Soit $K$ un compact non vide de $\mathbb{R}^n$, on considère le système(1.1). On dit que $K$ est asymptotiquement stable pour le système (1.1) si:*

- *$K$ est stable pour le système (1.1);*
- *$K$ est attractif pour le système (1.1).*

**Définition 1.27. (Stabilité globale et asymptotique de *K*)** *Soit $K$ un compact non vide de $\mathbb{R}^n$, on considère le système(1.1). On dit que $K$ est globalement asymptotiquement stable pour le système(1.1) si :*

- *$K$ est stable pour le système (1.1);*
- *pour tout $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x(t, t_0, x_0)$ est définie pour tout $t \geq t_0$ et*

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} d(x(t, t_0, x_0), K) = 0.$$

**Exemple 1.28.** On considère le système :

$$x' = \frac{x}{1+t}, t \geq 0$$

Il admet des solutions de la forme : $x(t,t_0,x_0) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{-1}{1+s} \mathrm{d}s\right) = x_0 \frac{1+t_0}{1+t}$. Donc, 0 est globalement asymptotiquement stable.

### 1.2.3 Stabilité uniforme

**Définition 1.29. (Stabilité uniforme de $\boldsymbol{K}$)** *Soit $K$ un compact non vide de $\mathbb{R}^n$, on considère le système* (1.1)*. On dit que $K$ est uniformément stable pour le système* (1.1) *si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon)$ tel que pour tout $t_0 \in I$,*

$$(x_0 \in B_{\delta(\varepsilon)}(K)) \Longrightarrow \begin{cases} x(t,t_0,x_0) \text{ est définie pour } t \geq t_0, \\ x(t,t_0,x_0) \in B_\varepsilon(K)\ \forall t \geq t_0 \end{cases}$$

**Remarque 1.30.** La stabilité uniforme entraîne la stabilité pratique mais la réciproque est fausse. On a vu dans l'Exemple 1.22 que 0 est un point d'équilibre stable pour le système

$$x' = (6t\sin(t) - 2t)x, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Supposons que $t_0$ prend les valeurs successives $t_0 = 2\pi n, n \in \mathbb{N}$ et que $x(t,t_0,x_0)$ soit évalué en $t_0 + \pi$, alors

$$x(t_0 + \pi, t_0, x_0) = x_0 \exp[(4n+1)(6-\pi)\pi].$$

Donc si $x_0 \neq 0$ on a:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{x(t_0 + \pi, t_0, x_0)}{x_0} = +\infty$$

Ainsi, pour $\varepsilon$ donné, il n'existe pas de $\delta$ indépendant de $t_0$ qui permet de dire que 0 est uniformément stable. Donc, la stabilité pratique n'entraîne pas la stabilité uniforme.

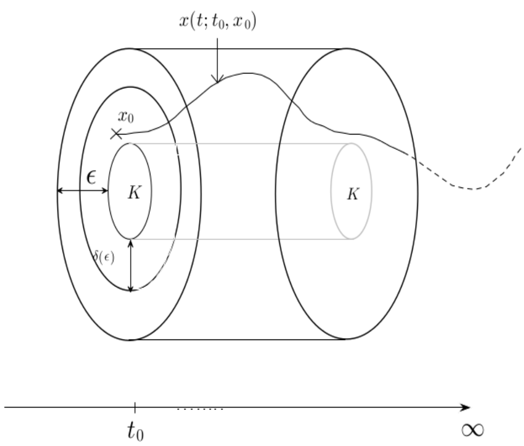


**Figure 1.3.**

Caractérisons la stabilité uniforme à l'aide des fonctions de classe $\mathcal{K}$.

**Théorème 1.31. (Stabilité uniforme d'un point d'équilibre, [10])** *Si 0 est un équilibre du système (1.1), alors 0 est uniformément stable si et seulement si, il existe une constante $c>0$, et une fonction $\rho$ de classe $\mathcal{K}$ telle que :*

$$\forall t_0 \in I, x_0 \in B(0,c), \forall t \geq t_0, \|x(t,t_0,x_0)\| \leq \rho(\|x_0\|)$$

**Démonstration.** Soit $t_0 \in I$, supposons qu'il existe une fonction $\rho$ de classe $\mathcal{K}$ telle que :

$$\forall x_0 \in B(0,c), \forall t \geq t_0, \|x(t,t_0,x_0)\| \leq \rho(\|x_0\|).$$

Soit $\varepsilon>0$, et $\delta = \min\{c, \rho^{-1}(\varepsilon)\}$, alors pour $x_0 \in B(0,\delta)$, on a

$$\|x(t,t_0,x_0)\| \leq \rho(\|x_0\|) \leq \rho(\delta) \leq \rho(\rho^{-1}(\varepsilon)) = \varepsilon$$

d'où la stabilité uniforme.

Réciproquement, soit $t_0 \in I$, on suppose que pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta(\varepsilon)$ tel que:

$$(x_0 \in B(0,\delta(\varepsilon))) \Longrightarrow (x(t,t_0,x_0) \in B(0,\varepsilon))\ \forall t \geq t_0.$$

Considérons la borne supérieur $\tilde{\delta}(\varepsilon)$ de tous les $\delta(\varepsilon)$ donnés ci-dessus. Alors pour tout $t \geq t_0$

$$\left(x_0 \in B\left(0, \tilde{\delta}(\varepsilon)\right)\right) \Longrightarrow (x(t,t_0,x_0) \in B(0,c)).$$

Donc, si $\delta_1 > \tilde{\delta}(\varepsilon)$, il existe au moins un point initial $\tilde{x_0}$ vérifiant

$$\tilde{x_0} \in B(0,c), \quad \sup_{t \geq t_0} \|x(t,t_0,x_0)\| \geq \varepsilon.$$

La fonction $\tilde{\delta}(\varepsilon)$ est définie positive. Elle n'est pas décroissante par définition et elle tend vers 0 quand $\varepsilon \longrightarrow 0$. Mais $\tilde{\delta}(\varepsilon)$ n'est pas nécessairement continue. On choisit alors une fonction $\boldsymbol{\zeta}(r)$ de classe $\mathcal{K}$, telle que:

$$\boldsymbol{\zeta}(r) \leq k\tilde{\delta}(r)$$

avec $0<k<1$. Cette fonction admet une inverse $\rho$ qui est de clase $\mathcal{K}$. Posons

$$c = \lim_{r \longrightarrow +\infty} \boldsymbol{\zeta}(r).$$

Soit $x_0 \in B(0,c)$, posons $\varepsilon = \rho(\|x_0\|)$.

Alors $x_0 \in B(0,\delta(\varepsilon))$ et :

$$\|x(t,t_0,x_0)\| \leq \varepsilon = \rho(\|x_0\|) \forall t \geq t_0$$ □

**Définition 1.32. (Domaine de stabilité uniforme de $\boldsymbol{K}$.)** *Soit $K$ un compact non vide de $\mathbb{R}^n$, uniformément stable pour le système(1.1). Pour tout $\varepsilon>0$, il existe un $\delta_{\max}(\varepsilon) > 0$ maximum parmi les $\delta(\varepsilon)$. On définit alors le domaine de stabilité uniforme de $K$ par:*

$$\mathcal{D}_{\mathrm{su}}(K) = \cup_{\varepsilon>0} D(0, \delta_{\max}(\varepsilon)).$$

### 1.2.4 Stabilité asymptotiquement uniforme

**Définition 1.33. (Stabilité asymptotique et uniforme de $\boldsymbol{K}$)** *Soit $K$ un compact non vide de $\mathbb{R}^n$, on dit que $K$ est uniformément asymptotiquement stable pour le système (1.1) si :*

- *$K$ est uniformément stable pour le système (1.1);*
- $\exists\delta>0; \forall\varepsilon>0, \exists T(\varepsilon)>0;$ $(x_0\in B_\delta(K))\Longrightarrow(x(t,t_0,x_0)\in B_\varepsilon(K))$ $\forall t\geq t_0+T(\varepsilon)$ $(a)$.

**Remarque 1.34.** On peut reformuler la condition $(a)$ par :

$$\exists R_1>0; \forall 0<R_2<R_1, \exists T(R_1,R_2); \forall t\geq t_0+T(R_1,R_2)$$

$$(x_0\in B_{R_1}(K))\Longrightarrow(x(t,t_0,x_0)\in B_{R_2}(K))$$

C'est à dire que la trajectoire $x(t,t_0,x_0)$ partant de $B_{R_1}(K)$ va converger dans une boule plus petite $B_{R_2}(K)$. Donc, la stabilité asymptotique uniforme implique la stabilité asymptotique mais pas l'inverse.

**Théorème 1.35. (Voir [6])** *Si $K=\{0\}$, alors la deuxième condition de la Définition 1.33 d'un équilibre uniformément asymptotiquement stable pour le système (1.1)est équivalente à l'existence d'une fonction $\sigma$ vérifiant :*

- $\sigma$ est définie, continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$;
- $\lim_{r\longrightarrow+\infty}\sigma(r)=0$;
- il existe $\eta>0$ tel que pour tout $x_0\in B(0,\eta)$: $\|x(t,t_0,x_0)\|\leq\sigma(t-t_0)$ $\forall t\geq t_0$.

Caractérisons la stabilité asymptotique et uniforme à l'aide d'une fonction de classe $\mathcal{KL}$.

**Théorème 1.36. (Stabilité asymptotique et uniforme d'un point d'équilibre, voir[10])** *Si 0 est un équilibre du système (1.1), alors 0 est uniformément asymptotiquement stable si et seulement si, il existe une constante $c>0$, et une fonction $\beta$: $[0,\ a]\times\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+$de classe $\mathcal{KL}$ telle que: $\forall x_0\in B(0,\ c)$, $\forall t_0\in I$, $\|x(t,t_0,x_0)\|\leq\beta(\|x_0\|,t-t_0)$, $\forall t\geq t_0$.*

**Démonstration.** Soit $t_0\in I$, supposons qu'il existe une fonction $\beta$ de classe $\mathcal{KL}$ telle que:

$$\forall x_0\in B(0,c), \|x(t,t_0,x_0)\|\leq\beta(\|x_0\|,t-t_0)\forall t\geq t_0.$$

Alors,

$$\|x(t,t_0,x_0)\|\leq\beta(\|x_0\|,0)$$

et ceci implique que 0 est uniformément stable en t, d'après le Théorème 1.31. De plus,

pour $x_0\in B(0,c)$, on a

$$\|x(t,t_0,x_0)\|\leq\beta(c,t-t_0)\forall t\geq t_0.$$

Ce qui montre que $x(t,t_0,x_0) \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow +\infty$ uniformément en t.

Réciproquement, supposons que 0 est uniformément asymptotiquement stable. En raison de la stabilité uniforme et d'après le Théorème 1.31, il existe une constante $c>0$ et une fonction $\rho$ de classe $\mathcal{K}$, telle que si $t_0 \in I$,

$$\forall r \in [0,c], \forall x_0 \in B(0,r), \|x(t,t_0,x_0)\| \leq \rho(\|x_0\|) < \rho(r) \forall t \geq t_0 \, (a_1)$$

De plus, si $\eta>0$ est donné, alors il existe $T=T(\eta,r)$ tel que

$$\|x(t,t_0,x_0)\| < \eta \forall t \geq t_0 + T(\eta,r)$$

on considère, $\tilde{T}(\eta,r)$ la borne supérieur de tous les $T(\eta,r)$ définis ci-dessus tel que :

$$\|x(t,t_0,x_0)\| < \eta \forall t \geq t_0 + \tilde{T}(\eta,r)$$

Ainsi, on a:

$$\sup_{t_0 \leq t \leq t_0+\tilde{T}(\eta,r)} \|x(t,t_0,x_0)\| \geq \eta.$$

La fonction $\tilde{T}(\eta,r)$ est non négative non croissante en $\eta$, non décroissante en r :

$$\tilde{T}(\eta,r) = 0, \forall \eta \geq \rho(r).$$

Posons:

$$W_r(\eta) = \frac{2}{\eta}\int_{\frac{\eta}{2}}^{\eta} \tilde{T}(s,r)ds + \frac{r}{\eta} \geq \tilde{T}(\eta,r) + \frac{r}{\eta}.$$

La fonction $W_r(\eta)$ est positive et les propriétés suivantes:

- pour tout r fixé, $\eta \longmapsto W_r(\eta)$ est continue, strictement décroissante et $\lim_{\eta \longrightarrow +\infty} W_r(\eta) = 0$;
- pour tout $\eta$ fixé, $r \longmapsto W_r(\eta)$ est strictement croissante.

Notons $U_r = W_r^1$. Alors $U_r$ hérite des deux propriétés précédentes de $W_r$ et:

$$\tilde{T}(U_r(s),r) < W_r(U_r(s)) = s$$

Par conséquent,

$$\forall x_0 \in B(0,r), \|x(t,t_0,x_0)\| \leq U_r(t-t_0) \, \forall t \geq t_0 \, (a_2)$$

En regroupant $(a_1)$ et $(a_2)$, on en déduit que:

$$\forall x_0 \in B(0,c), \|x(t,t_0,x_0)\| \leq \sqrt{\rho(\|x_0\|)U_c(t-t_0)} \, \forall t \geq t_0.$$

On pose

$$\beta(r,s) = \sqrt{\rho(r)U_c(s)}\,.$$

D'où le résultat. □

**Définition 1.37. (Stabilité globale, uniforme et asymptotiquement stable: GUAS de $K$)** *Soit $K$ un compact non vide de $\mathbb{R}^n$, on dit que $K$ est globalement uniformément asymptotiquement stable pour le système* (1.1) *si:*

1. *$K$ est uniformément asymptotique stable pour le système* (1.1)*;*

2. $\forall \delta > 0; \forall \varepsilon > 0, \exists T(\delta, \varepsilon) > 0; \forall t_0 \in I$, $(x_0 \in B_\delta(K)) \Longrightarrow (x(t, t_0, x_0) \in B_\varepsilon(K))$ $\forall t > t_0 + T(\delta, \varepsilon)$.

## 1.3 Stabilité au sens de Lyapunov

### 1.3.1 Dérivée d'un système dynamique

On considérera toujours l'équilibre en 0. Pour le cas général, il suffit de faire une translation.

**Définition 1.38.** *On considère le système (1.2) et $V$:$\Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ayant des dérivées partielles sur $\Omega$. on définit la dérivée totale $V'$pour le système (1.2) par :*

$$V'(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial_i V}{\partial x_i}(x) \boldsymbol{f}_i(x).$$

**Définition 1.39.** *On considère le système (1.1), et $V$: $I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ayant des dérivées partielles sur $I \times \Omega$. On définit la dérivée totale $V'$pour le système (1.1) par :*

$$V'(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, y) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^i V}{\partial x_i}(t, y) \boldsymbol{f}_i(t, y).$$

### 1.3.2 Théorème de stabilité de Lyapunov

#### 1.3.2.1 Cas des systèmes autonomes

**Théorème 1.40. (Stabilité de Lyapunov)** *Soit 0 un point d'équilibre de (1.2), s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 et une fonction $V$: $\mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue, ayant des dérivées partielles continues, telles que :*

*i. $V$ soit définie positive;*

*ii. la dérivée totale $V'$pour (1.2) soit négative,*

*alors 0 est stable et $V$ s'appelle une fonction de Lyapunov.*

*De plus si la dérivée totale $V'$pour (1.2) est définie négative, alors 0 est asymptotiquement stable et $V$ s'appelle une fonction stricte de Lyapunov.*

**Exemple 1.41.** On considère le système:

$$\begin{cases} x_1' = -x_1^3 - x_2^2 \\ x_2' = x_1 x_2 - x_2^2 \end{cases}$$

pour déterminer la stabilité de l'équilibre 0, posons :

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

On a V(0)=0 et V est définie positive. La dérivée de V pour le système vaut

$$V'(x_1, x_2) = x_1(-x_1^3 - x_2^2) + x_2(x_1 x_2 - x_2^3) = -(x_1^4 + x_2^4).$$

$V'$est clairement définie négative. D'après le théorème précédent, on déduit que 0 est asymptotiquement stable.

**Théorème 1.42. (Instabilité de Lyapunov)** *Soit 0 un point d'équilibre de* (1.2), *s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 et une fonction $W\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue, ayant des dérivées partielles continues, telles que :*

*i) pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}, W(x) > W(0)$*

*ii) La dérivée totale $W'$pour* (1.2) *soit définie positive,*

*alors 0 est instable.*

**Remarque 1.43.** Il existe un théorème d'instabilité plus général (le théorème de Chetaev) que l'on peut trouver dans [10].

#### 1.3.2.2 Cas des systèmes non autonomes

**Théorème 1.44. (Stabilité voir[9])** *Soit 0 un point de l'équilibre de* (1.1), *s'il existe un voisinage $\mathcal{V}_{t_0}$ et une fonction $V\colon \mathcal{V}_{t_0} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue, ayant des dérivées partielles continues, telles que :*

*i. V soit définie positive;*

*ii. la dérivée totale $V'$pour* (1.1) *soit négative,*
*alors 0 est stable et V s'appelle une fonction de Lyapunov;*

*iii. Si 0 est stable et V une fonction de Lyapunov et décrescente,*
*alors 0 est uniformément stable;*
*et si $V'$ est définie négative pour* (1.1),
*alors 0 est uniformément asymptotiquement stable;*

*iv. Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, $V'$ négative et si V est une fonction de Lyapunov radialement non borné,*
*alors 0 est globalement uniformément stable;*
*et si $V'$ est définie négative,*
*alors 0 est globalement uniformément asymptotiquement stable.*

**Exemple 1.45.** On considère le système

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 - \exp(-2t)x_2 \\ x_2' = x_1 - x_2 \end{cases}$$

Pour déterminer la stabilité de 0, posons

$$V(t, x) = x_1^2 + (1 + \exp(-2t))x_2^2.$$

Cette fonction est définie positive, car elle est dominée par la fonction définie positive

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

indépendante de t. De plus, la dérivée de V pour le système vaut

$$V'(t,x) = -2(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2(1+\exp(-2t))),$$

ce qui montre que: $V'(t,x) \leq -2(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) \leq -(x_1 - x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2$

On en déduit alors que V'est définie négative, et que 0 est uniformément asymptotiquement stable.

**Théorème 1.46. (Instabilité de Chetaev [6])** *Soit le système* (1.1)*, admettant l'origine pour équilibre. S'il existe un voisinage $\mathcal{V}_{t_0}$ et une fonction $V\colon \mathcal{V}_{t_0} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue ayant des dérivées partielles telles que :*

- $\forall \epsilon > 0, \exists x_0 \in B(0,\varepsilon); \forall t \geq t_0, V(t,x_0) \leq 0;$
- *$V$ est minorée sur $\mathcal{U}'$un sous-domaine de $\mathcal{U} = \{x \in \mathcal{V}_{t_0}; V(t,x) \leq 0, \forall t \geq t_0\}$;*
- *La dérivée totale $V'$pour le système* (1.1) *est définie négative sur $\mathcal{U}'$,*

*alors l'origine est instable.*

**Exemple 1.47.** Soit le système :

$$\begin{cases} x' = x^3 + y^3 \\ y' = xy^2 + y^3 \end{cases}$$

l'origine est un point d'équilibre instable. En effet, posons

$$V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

le domaine $\mathcal{U}$ est définie par

$$\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon -y \leq x \leq y \,\text{ou}\, y \leq x \leq -y\}$$

En déduisant $\mathcal{U}' = \mathcal{U} \cap B(0,\varepsilon)$, V est minorée par $-\frac{\varepsilon^2}{2}$ et V'$=(x^4 - y^4) < 0$ sur ce domaine. Le théorème précédent permet alors de conclure quant à l'instabilité de l'origine.

# Chapitre 2
# Stabilité des systèmes à commutation

## 2.1 Introduction

Les systèmes commutés représentent une classe particulière de systèmes hybrides. Ils commutent entre plusieurs modes d'exploitation où chaque mode est dirigé selon des lois dynamiques continues appropriées. Un système hybride est composé de système dynamique continue et discret. Il s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} x'(t) = \boldsymbol{f}(x(t), q(t)) \\ \\ q'(t) = \boldsymbol{g}(t, x(t), q(t), u_d) \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^n, q \in Q, t \in \mathbb{R}_+, u_d \in Q_d$$

L'état continu se développe dans un espace continu, tandis que l'état discret et le contrôle discret se développent dans des espaces discrets $Q$ et $Q_d$ [3].

Parmi les classes diverses de systèmes hybrides, nous allons nous intéresser particulièrement aux systèmes commutés.

### 2.1.1 Rappels

**Définition 2.1.** *Un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$(respectivement $\mathbb{C}$) *est un ensemble* $\boldsymbol{E}$ *muni de deux opérations.*

*D'abord d'une addition, c'est-à-dire qu'à tout couple* $v, w \in \boldsymbol{E}$ *on peut associer* $v + w \in \boldsymbol{E}$ *tel que les règles de calcul dans* $\mathbb{R}^n$(respectivement $\mathbb{C}^n$) *ait lieu, à savoir*

- $(u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in \boldsymbol{E}$;
- $u + v = v + u, \forall u, v \in \boldsymbol{E}$;
- $u + 0_{\boldsymbol{E}} = u, \forall u \in \boldsymbol{E}$;
- *pour tout* $u \in \boldsymbol{E}$, *il existe un élement* $v \in \boldsymbol{E}$ *tel que* $u + v = 0_{\boldsymbol{E}}$; *De plus il existe une application de* $\mathbb{R} \times \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{E}$ *notée* $(\lambda, v) \longrightarrow \lambda.v$ *telle que* $\forall \lambda$, $\mu \in \mathbb{R}$(respectivement $\mathbb{C}$) *et* $v, w \in \boldsymbol{E}$. *On ait :*
  - $\lambda.v = v$;
  - $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$;
  - $\lambda.(v + w) = \lambda v + \lambda w$.

**Définition 2.2.** *Soit* $\mathcal{P}$ *un sous-espace d'un espace vectoriel linéaire de dimension finie. Un système commuté est constitué par une famille de sous-systèmes:*

$$x'(t) = \boldsymbol{f}_p(x(t), t), t \in \mathbb{R}_+, p \in \mathcal{P} \tag{2.1}$$

développé dans $\mathbb{R}^n$. La fonction $\boldsymbol{f}_p(x(t), t)$ est supposée suffisamment régulière (au moins localement Lipschitz). Cette condition est de s'assurer que la solution de chaque sous-système existe. Dans le système (2.1), seulement un sous-système est actif à un instant donné. Cette loi qui commande la commutation entre les sous-systèmes est appelée signal de commutation. Nous pouvons la définir comme suit:

$$\sigma\colon \begin{cases} [0, +\infty) \longrightarrow \mathcal{P} \\ t \longrightarrow \sigma(t) \end{cases}$$

Cependant, cette fonction peut être parfois constante par morceaux parce que les systèmes ayant la commutation lente et ceux possédant la commutation rapide n'ont pas le même comportement. Une telle fonction a un nombre fini de discontinuités que nous appelons les temps de commutation. Elle prend une valeur constante sur chaque intervalle entre deux temps de commutations consécutifs. Nous notons par $U$, l'ensemble des fonctions constantes par morceaux définies sur $[0, +\infty)$ à valeurs dans $\mathcal{P}$. Formellement, nous représentons un système commuté par :

$$x'(t) = \boldsymbol{f}_\sigma(x(t), t), \sigma \in U \tag{2.2}$$

Dans les systèmes que nous étudions, les champs vectoriels sont autonomes. Donc nous utiliserons la description :

$$x' = \boldsymbol{f}_\sigma(x), \sigma \in U \tag{2.3}$$

### 2.1.2 Présentation et problèmes de stabilités correspondantes

Le problème de stabilité des systèmes à commutation est complexe et intéréssant. Ici on va faire l'investigation des systèmes commutés de la forme :

$$x' = \boldsymbol{f}_\sigma(x) \, \forall \sigma \in U \tag{2.4}$$

Pour le cas particulier linéaire, on a :

$$x' = A_\sigma x, x \in \mathbb{R}^n, \{A_\sigma\}_{\sigma \in U} \subset \mathbb{R}^{n \times n} \tag{2.5}$$

Considérons $U$=$\{1, 2\}$, $x \in \mathbb{R}^2$ et étudions la commutation de deux sous-systèmes dans le plan.

- Cas 1: Supposons que les deux sous-systèmes individuels sont asymptotiquement stables.

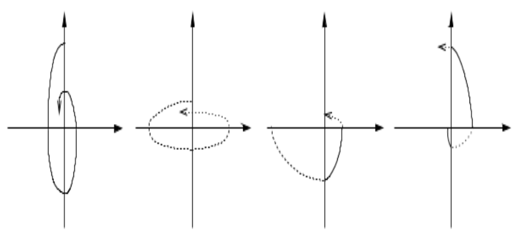

**Figure 2.1.**

Pour différentes options du signal, le système commuté devient instable ou stable.

- Cas 2: Supposons maintenant, que les deux sous-systèmes sont instables.

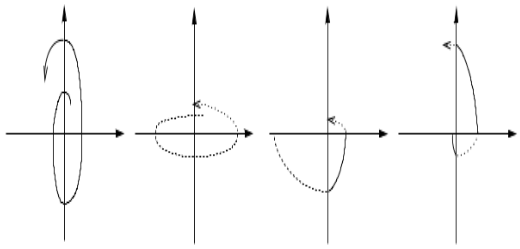

**Figure 2.2.**

Suivant le signal de commutation particulière, le système commuté devient asymptotiquement stable ou instable.

- La commutation spontanée peut déstabiliser un système de commutation constant si tous les sous-systèmes individuels sont stables.
- Il est possible de stabiliser un système de commutation si tous les sous-systèmes individuels sont instables. Donc, ces phénomènes montrent que la stabilité asymptotique des sous-systèmes ne suffit pas pour garantir la stabilité des systèmes à commutation. Mais qu'il faut prendre en compte les propriétés de la loi de commutation.

Dans l'analyse de stabilité, nous allons étudier ces deux principaux problèmes suivants:

- Trouver des conditions de la stabilité asymptotique d'un système de commutation pour des signaux arbitrairement commutés.
- Identifier des signaux de commutation arbitraires pour lesquels le système de commutation non asymptotique stable au début devient asymptotiquement stable.

## 2.2 Stabilité quelle que soit la loi de commutation

Pour un point initial $x_0$, un signal de commutation $\sigma \in U$ donné, nous pouvons suivre l'évolution du système en tout point dans le temps. Cette évolution est appelée trajectoire du système commuté et est notée par : $\gamma_{x_0,\sigma}(t)$. Nous pouvons définir les concepts de stabilité de systèmes commutés de deux manières différentes selon les propriétés qualitatives de ses solutions.

**Définition 2.3. (Propriété uniforme)** *On dit que la stabilité des systèmes commutés est uniforme si elle dépend seulement de l'état continu x et indépendant du signal de commutation(c'est -à -dire un signal de commutation arbitraire).*

**Définition 2.4. (Propriété conditionnelle)** *La stabilité des systèmes commutés est dite conditionnelle si elle dépend de x et ceci pour un signal de commutation.*

Maintenant, nous allons définir et discuter des concepts de stabilité uniforme. Supposons que $\boldsymbol{f}_\sigma(0) = 0$, pour chaque $\sigma \in U$ et soit $B_\varepsilon$ (respectivement $B_\delta$) la boule d'unité de rayon $\varepsilon$ (respectivement $\delta$), centrée à l'origine.

### 2.2.1 Stabilité uniforme

**Définition 2.5. (Stabilité uniforme)** *On dit que l'origine du système commuté* (2.4) *est uniformément stable pour $U$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que:*

$$x_0 \in B_\delta \Longrightarrow \gamma_{x_0,\sigma}(t) \in B_\varepsilon \,\text{pour tout}\, t \geq 0 \,\text{et}\, \sigma \in U.$$

**Définition 2.6. (Stabilité attractive)** *On dit que l'origine du système commuté* (2.4) *est uniformément attractive pour $U$, s'il existe $\delta > 0$ tel que:*

$$x_0 \in B_\delta \Longrightarrow \lim_{t \longrightarrow +\infty} \gamma_{x_0,\sigma}(t) = 0 \text{ pour tout}\, t \geq 0, \text{ et}\, \sigma \in U$$

**Définition 2.7. (uniformément asymptotiquement et/ou exponentiellement stable)** *Le système* (2.4) *est uniforme, asymptotique et stable (où uniforme, attractif et stable)s'il existe une constante $\alpha > 0$ et une fonction $\beta$ de classe $\mathcal{KL}$ tel que pour tout signal de commutation $\sigma$ les solutions de* (2.4) *avec $|x(0)| \leqslant \alpha$ satisfont l'inégalité:*

$$|x(t)| \leq \beta(|x(0), t|), \forall t \geq 0 \tag{2.6}$$

*Si de plus $\forall \lambda, c > 0$ on a :*

$$|x(t)| \leq c|x(0)|\exp(-\lambda t)\forall t \geq 0 \tag{2.7}$$

*Alors le système* (2.4) *sera uniforme, exponentiellement stable.*

- Si les inégalités (2.6) et (2.7) sont valables pour tous les signaux de commutations et toutes les conditions initiales, nous obtenons, respectivement un système global, uniforme et asymptotiquement stable (GUAS ) et un système global, uniforme et exponentiellement stable (GUES). Notons que les définitions de GUES et GUAS données précédemment sont équivalentes pour les systèmes linéaires à commutations.

### 2.2.2 Fonction de Lyapunov Quadratique commune: CQLF

Pour identifier les classes des systèmes commutés qui sont GUAS, il suffit de trouver une fonction de Lyapunov commune partagée par les sous-systèmes individuels. Pour chaque fonction de Lyapunov inverse, on a besoin de la famille (2.1) pour satisfaire la propriété uniforme des conditions de régularités.

**Définition 2.8. (CQLF)** *$V$ est une fonction de Lyapunov commune* (FLC) *pour la famille des systèmes* (2.2) *s'il existe une fonction continue définie positive $W$:$\mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ telle que :*

$$\frac{\partial V}{\partial x} \boldsymbol{f}_p(x) \leq -W(x), \forall p \in \mathcal{P} \tag{2.8}$$

*V est dite radialement illimitée si V(x)$\longmapsto+\infty$ quand |x|$\longmapsto+\infty$*

**Définition 2.9. (matrice de Hurwitz)** *A est dite matrice de Hurwitz ou matrice de stabilité si toutes ses valeurs propres vérifient* $\mathfrak{R}_e(\lambda_i)<0$.

#### 2.2.2.1 Cas Non lineaire

**Théorème 2.10.** *[11]***(FLC radialement illimité)** *Supposons que le système commuté(2.4) est GUAS, l'ensemble* $\{\boldsymbol{f}_p(x), p\in U\}$ *compact pour chaque x fixé et de plus la fonction (x,p)*$\longmapsto \boldsymbol{f}_p(x)$ *est localement lipschitzienne en x uniformément sur p, alors les systèmes dans la famille (2.1) partagent une fonction de Lyapunov commune radialement illimitée.*

**Théorème 2.11.** *[11]***(GUAS)** *Si tous les systèmes dans la famille(2.1) partagent une fonction de Lyapunov radialement illimitée, alors le système de commutation(2.4) est GUAS.*

Il y a un résultat utile que nous trouvons commode d'exposer ici comme un corollaire de Théorème 2.11. Il dit que si le système commuté (2.4) est GUAS, alors toutes "les combinaisons convexes" des sous-systèmes individuels de la famille (2.1) sont GUAS. Ces combinaisons convexes sont définies par les champs vectoriels

**Corollaire 2.12. (GUAS)** *Conformément aux suppositions du Théorème 2.10 pour tout* $\alpha\in[0,1]$ *et pour tout p,q*$\in\mathcal{P}$*, le système* $x'=\boldsymbol{f}_{p,q,\alpha}(x)=\alpha\boldsymbol{f}_p(x)+(1-\alpha)\boldsymbol{f}_p(x)$ $p,q\in U, \alpha\in[0,1]$ *est GUAS.*

Donc s'il existe une combinaison convexe qui n'est pas GUAS, alors le système (2.4) ne serait pas GUAS.

#### 2.2.2.2 Cas des systèmes linéaires

Considérons maintenant, le système commuté linéaire défini précédemment:

$$x' = A_\sigma x, x\in\mathbb{R}^n, \{A_\sigma\}_{\sigma\in U}\subset\mathbb{R}^{n\times n}. \tag{2.9}$$

où $U$ est supposé compact et $\sigma$ mesurable parce que constante par morceaux. Comme $U$ est compact et

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow \{A_\sigma\}_{\sigma\in U} \\ \sigma &\longmapsto A_\sigma \end{aligned}$$

continue, donc l'ensemble $\{A_\sigma\}_{\sigma\in U}$ est compact. Dans ce cas toutes les notions de stabilités sont automatiquement uniformes pour la commutation de fonction ([1]).

**Définition 2.13.** *Un système est dit attractif local si toutes les trajectoires débutant dans un certain voisinage de l'origine convergent à l'origine.*

**Définition 2.14. (Fonction de Lyapunov Commune)** *Une fonction de Lyapunov commune V:*$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *du système commuté de la forme (2.9) est une fonction continue telle que V(.) est définie positive et diminue strictement le long des trajectoires non constantes.*

**Définition 2.15. (Fonction de Lyapunov Commune non strict)** *Une fonction $V$:$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie positive est une fonction de Lyapunov commune non strict si $V(.)$ n'augmente pas le long des solutions non constantes.*

**Définition 2.16. (Fonction de Lyapunov Quadratique Commune: CQLF)** *Une fonction de Lyapunov quadratique commune est une fonction de la forme $V(x)$=$x^TPx$ où $P$ est la matrice symétrique définie positive et les matrices $A^T_{\sigma(t)}P+$ $\mathrm{PA}_{\sigma(t)}$ sont négatives pour tout $\sigma(t)\in U$*

**Théorème 2.17.** *Le système linéaire commuté (2.9) est GUES si et seulement si, il est localement attractive pour tout signal de commutation.*

**Théorème 2.18.** *[15] Soit le système linéaire commuté $(SLC)$(2.9). Si toutes les matrices $A_p$, $p \in U$ sont Hurwitz et s'il existe une matrice carrée $T$$\in$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telles que toutes les matrices $A_p$=$T^{-1}A_pT$ soient triangulaires supérieures (ou inférieures), alors il existe une CQLF pour le système (2.9).*

**Théorème 2.19.** *[19] [20] Soit $A_1$ et $A_2$ deux matrices de Hurwitz appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Pour tout $\alpha\in[0,1]$ les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *il existe une CQLF pour le sytème à commutation* (5.4) *décrit par $A_1$et $A_2$;*
2. *les matrices $cov\{A_1,A_2\}$ et $cov\{A_1,A_2^{-1}\}$ sont Hurwitz où*
   $cov\{A_1,A_2\}=\{\alpha A_1+(1-\alpha)A_2\forall\alpha\in[0,1]\}$;
3. *Les matrices $A_1A_2$ et $A_1A_2^{-1}$ n'ont aucune valeur propre réelle négative.*

Le concept de fonction de Lyapunov commune est très utile car son existence est équivalente à GUAS. Pour les systèmes linéaires commutés, la stabilité globale est équivalente à la stabilité locale, par conséquent nous avons le théorème suivant:

**Théorème 2.20.** *[7]* **(GUAS)** *Le système linéaire commuté (2.9) est global, uniforme et asymptotiquement stable (GUAS) si et seulement si, il existe une* CQLF *pour ce système .*

**Théorème 2.21.** *[8] S'il existe des matrices $R_p$=$R_p^T$>0,$\forall p\in U$ telle que:*

$$\sum_{p=1}^{m} A_p^TR_p+R_pA_p>0; \text{alors,}$$

*il n'existe pas de fonction de Lyapunov quadratique commune pour la famille des systèmes (2.9).*

L'inconvénient de cette méthode est que pour certaines matrices de grande dimension ou de matrices mal conditionnées les algorithmes numériques actuels peuvent ne pas donner de résultats. Cet exemple ci-dessous montre qu'un système linéaire commuté peut être GUAS sans qu'il admet une fonction de Lyapunov commune quadratique.

**Exemple 2.22.** Soit $U = \{1, 2\}$;

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{et } A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 0.1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ces deux matrices sont de Hurwitz. Les systèmes $x' = A_1 x$ et $x' = A_2 x$ ne partagent pas de fonction de Lyapunov quadratique commune. En effet:

Soit P$=\begin{pmatrix} 1 & q \\ q & r \end{pmatrix}$ une matrice symétrique définie positive satisfaisant:

$$A_p^T P + \mathrm{PA}_p < 0 \forall p \in U (5.d)$$

$$\begin{aligned} -A_1^T P - \mathrm{PA}_1 &= -\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & q \\ q & r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & q \\ q & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-2q & 2q+1-r \\ 2q+1-r & 2q+2r \end{pmatrix} \\ -A_2^T P - \mathrm{PA}_2 &= -\begin{pmatrix} -1 & 0.1 \\ -10 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & q \\ q & r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & q \\ q & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 0.1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-q/2 & 2q+10-r/10 \\ 2q+10-r/10 & 20q+2r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ces deux matrices ne sont définies positives que si :

$$q^2 + \frac{(r-3)^2}{8} < 1 \tag{2.10}$$

et

$$\text{et } q^2 + \frac{(r-300)^2}{800} < 100 \tag{2.11}$$

respectivement.

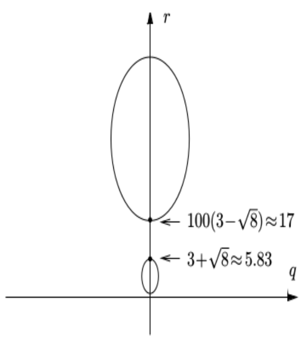


**Figure 2.3.**

**Réponse.** Les ellips obtenues par les formules (2.10) et (2.11) ne se croisent pas. Donc une fonction de Lyapunov quadratique commune n'existe pas. Mais le système linéaire commuté $x' = A_\sigma x$ est GUAS. Pour s'en convaincre, nous allons regarder la figure 2.4 qui utilise la notion de pire trajectoire qui sera définie plus tard.

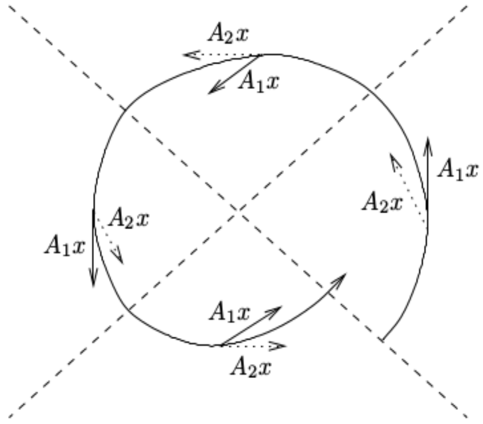


**Figure 2.4.**

## 2.2.3 Relation de commutation et stabilité

Dans cette partie nous allons nous intéresser au rôle de rotation de commutation entre les systèmes commutés. Une condition nécéssaire et suffisante pour l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune est proposée par Shorten et Narendra [16]. Considérons l'enveloppe convexe générée par deux matrices $A_1$ et $A_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définies par:

cov$\{A_1, A_2\} = \{\alpha A_1 + (1-\alpha)A_2 \,\forall \alpha \in [0,1]\}$

### 2.2.3.1 Cas des systèmes linéaires

Considérons le système linéaire commuté (2.9) et supposons que $U = \{1, 2\}$.

**Définition 2.23.** *Soit* $\mathbb{M}$ *un espace vectoriel sur un corps commutatif* $\mathbb{K}$*. On appelle crochet de Lie une loi de composition interne sur* $\mathbb{M}$ *(*$\forall x, y \in \mathbb{M}, [x, y] \in \mathbb{M}$*) vérifiant les propriétés suivants:*

1. *bilinéaire :*$\forall x, y, z \in \mathbb{M}$ et $\mu, \lambda \in \mathbb{R}\, [\lambda x + \mu y, z] = \lambda[x, z] + \mu[y, z]$*;*
   $\forall x, y, z \in \mathbb{M}$ *et* $\mu, \lambda \in \mathbb{R}\, [x, \lambda y + \mu z] = \lambda[x, y] + \mu[y, z]$*;*
2. *l'application bilinéaire* $[\,;\,]$ est *alternée:*$\forall x \in M, [x, x] = 0$*;*
3. *relation de Jacobi:*$\forall x, y, z \in M [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$*;*

*On dit que deux champs de vecteurs commutent si leur crochet de Lie est identiquement nulle.*

**Définition 2.24.**

- *On dit que deux matrices* $A_1$ *et* $A_2$ *commutent si leur crochet de Lie*

$$[A_1, A_2] = A_1A_2 - A_2A_1$$

  *est identiquement nul.*

- *On dit que le flux de deux sous-systèmes x'=*$A_1x$ *et x'=*$A_2x$ *commutent si exp(*$A_1t$*)exp(*$A_2\tau$*)=exp(*$A_2\tau$*)exp(*$A_1t$*) pour tout t,*$\tau \geq 0$.

**Théorème 2.25.** *[4](GUAS)* *Si $\{A_\sigma, \sigma \in U\}$ est un ensemble fini de matrices de commutations de Hurwitz, alors le système linéaire commuté (2.9) est GUAS.*

**Théorème 2.26.** *[2]***(Uniformément asymptotiquement stable)** *Si toutes les matrices du système(2.9) sont Hurwitz et [ $A_u$,$A_v$] = 0 pour tout {u, v}∈U. Alors, le système ( 2.9) est uniformément asymptotiquement stable.*

#### 2.2.3.2 Cas des systèmes non linéaires

Pour étendre les résultats précédents aux systèmes non linéaires, on a besoin du crochet de Lie suivant:

$$[\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2](x) = \frac{\partial \boldsymbol{f}_2(x)}{\partial x}\boldsymbol{f}_1(x) - \frac{\partial \boldsymbol{f}_1(x)}{\partial x}\boldsymbol{f}_2(x)$$

Cette définition du crochet de Lie est compatible à celui linéaire à part la différence de signe.

**Théorème 2.27.** *[11]* **(GUAS)** *Si $\{\boldsymbol{f}_p, p \in U\}$ est un ensemble fini de champs vectoriels commutés de classe $\mathcal{C}^1$. Si de plus, l'origine est un équilibre global et asymptotiquement stable pour tous les systèmes de la famille( 2.1), alors le système commuté(2.4) est GUAS.*

Les matrices

$$A_p = \frac{\partial \boldsymbol{f}_p(x)}{\partial x}\backslash_{x=0}, p \in U$$

sont Hurwitz si et seulement si les champs vectoriels $\boldsymbol{f}_p$ sont exponentiellement stables. Ainsi une fonction de Lyapunov commune quadratique pour les systèmes linéarisés serviront d'une fonction de Lyapunov commune locale pour le système non linéarisé (2.1) de la famille initiale finie.

### 2.2.4 Nilpotent et algèbre de Lie

Considérons le système commuté(2.4). D'après ce qui précède, on peut étudier la stabilité des systèmes de commutation en utilisant les relations de commutations. La nature de ces relations de commutations est révélée par l'algèbre de Lie

$$\boldsymbol{g} = \{A_p, p \in \mathcal{P}\}_{\mathrm{LA}}$$

produit par les matrices $A_p$, p∈$U$ muni du crochet de Lie standard.

**Définition 2.28. (Algèbre de Lie)** *Une algèbre de Lie est un espace vectoriel muni d'un crochet de Lie c'est-à-dire bilinéaire, antisymétrique et qui vérifie la relation de Jacobi. Les classes de l'algèbre de Lie les plus simples sont nilpotentes et résolubles.*

**Définition 2.29.** *Un idéal de $\boldsymbol{g}$ est un sous-espace vectoriel $\mathcal{H}$ de $\boldsymbol{g}$ tel que:*

$$\forall g \in \boldsymbol{g}, \forall h \in \mathcal{H}, [g, h] \in \mathcal{H}.$$

*Il est en particulier, une sous-algèbre de Lie.*

**Définition 2.30.** *Une algèbre de Lie qui n'admet pas d'idéal non trivial,est appelée algèbre de Lie simple.*

**Définition 2.31. (Algèbre de Lie résoluble)** *Etant donnée une algèbre de Lie* $\boldsymbol{g}$, *les ordres* $\boldsymbol{g}^{(k)}$ *sont définis comme suit:* $\boldsymbol{g}^{(1)}=\boldsymbol{g}$; $\boldsymbol{g}^{(k+1)}=[\boldsymbol{g}^{(k)},\boldsymbol{g}^{(k)}]\subset\boldsymbol{g}^{(k)}$. *Si* $\boldsymbol{g}^{(k)}=0$ *pour* $k$ *suffisamment grand, alors* $\boldsymbol{g}$ *est résoluble.*

**Définition 2.32.** *Une algèbre de Lie est dite nilpotente lorsque toute la suite de commutateurs* $[[\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2],\boldsymbol{g}_3],\ldots,\boldsymbol{g}_n]$ *finit par être nulle, lorsque n devient suffisamment grand. Elle est une algèbre de Lie résoluble.*

#### 2.2.4.1 Cas linéaires

Considérons le système linéaire (2.9) et définissons l'algèbre de Lie associée à ce système

$$\boldsymbol{g}=\{A_\sigma\colon\sigma\in U\}_{L.A} \tag{2.12}$$

Ceci est l'ensemble des matrices $\mathrm{A}_\sigma$ et les commutateurs réitérés pour le crochet de Lie $[A_u,A_v]=A_uA_v-A_vA_u$ (pour plus de détails voir [11]). Cette notion est un outil trés important, c'est crucial pour la stabilité du système (2.9). On donne différents critères algébriques pour la stabilité uniforme.

**Théorème 2.33.** *[2] Soit* $\{A_\sigma,\sigma\in U\}$ *un ensemble compact de matrices d'Hurwitz. Si* $\boldsymbol{g}$ *dans l'équation* (2.12) *est une algèbre de Lie résoluble, alors le système commuté (2.9) est GUAS.*

Le Théorème 2.33 est le résultat principal de Hespanha et d'autres. Nous en présentons ci-dessous et illustrons le théorème par un exemple.

**Exemple 2.34.** Considérez le système commuté linéaire bidimensionnel suivant:

$$x'=A_ix, i=\{1,2\}$$

$$A_1=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & -3\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}0 & 3\\ -1 & -4\end{pmatrix}$$

les deux matrices sont de Hurwitz donc les deux sous-systèmes sont asymptotiquement stables.

En effet, le polynôme caractéristique de $A_1$ est:

$$P_{A_1}(\lambda)=(2+\lambda)^2;$$

et celui de $A_2$ est:

$$P_{A_2}(\mu)=(\mu^2+4\mu+3)$$

$A_1$ a une valeur propre double $\lambda$= -2 < 0 donc $A_1$ est de Hurwitz et $A_2$ a deux valeurs propres différentes $\mu=-1<0$ et $\mu=-3<0$ donc elle est aussi de Hurwitz.

Considérons l'algèbre de Lie $\boldsymbol{g}$ définie dans l'équation (2.12) pour ce système commuté linéaire, elle est produite par $A_1$et $A_2$. Donc, elle peut être écrite comme suit:

$$\boldsymbol{g}=\mathrm{span}\{A_1,A_2,[A_1,A_2]\}$$

Calculons le crochet de Lie de $A_1$ et $A_2$
$[A_1, \quad A_2] \quad =$
$A_1A_2 - A_2A_1$

$$[A_1, A_2] = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{g}^{(1)} = \boldsymbol{g} = \operatorname{span}\{A_1, A_2, A_3\} \quad = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{on } a\text{: } \boldsymbol{g}^{(k+1)} = [\boldsymbol{g}^{(k)}, \boldsymbol{g}^{(k)}]$$

pour $k = 1$,

$$\boldsymbol{g}^{(2)} = [\boldsymbol{g}^{(1)}, \boldsymbol{g}^{(1)}] \quad = \operatorname{span}\{[A_i, A_j]; A_i, A_j \in \boldsymbol{g}^{(1)}; i, j = \{1, 2, 3\}\} \quad = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

pour $k = 2$

$$\boldsymbol{g}^{(3)} = [\boldsymbol{g}^{(2)}, \boldsymbol{g}^{(2)}] \quad = \operatorname{span}\{[A_i, A_j]; A_i, A_j \in \boldsymbol{g}^{(2)}\} \quad = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Par suite, $\boldsymbol{g}$ est une algèbre de Lie résoluble, donc le système commuté (2.9) est GUAS.

Le Théorème 2.33 est généralisé dans [2] en utilisant la décomposition de Levi de $\boldsymbol{g}$ comme suit $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{r} \oplus \boldsymbol{s}$.

**Définition 2.35. (Décomposition de Levi)** *Toute algèbre de Lie $\boldsymbol{g}$ de dimension finie peut être écrite comme une somme semi-directe d'une algèbre de Lie résoluble et d'une algèbre de Lie simple, c'est -à -dire $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{r} \oplus \boldsymbol{s}$ où $\boldsymbol{r}$ est algèbre de Lie résoluble et $\boldsymbol{s}$ algèbre de Lie simple.*

**Théorème 2.36.** *[2] Soit $\{A_p, p \in U\}$ un ensemble compact de matrices d'Hurwitz et $\boldsymbol{g} = \{A_p,\, p \in U\}_{\mathrm{LA}}$ vérifie la décomposition de Lévi. Si $\boldsymbol{s}$ est compact, alors le système linéaire commuté (2.9) est GUAS.*

**Exemple 2.37.** Soit $\{A_\sigma = -\lambda_\sigma I + S_\sigma,\ \forall \lambda_\sigma > 0,\ \sigma \in U\}$ ensemble de matrices d'Hurwitz où $I$ est la matrice identité, $S_\sigma = -S_\sigma^T$ et $\boldsymbol{g} = \{A_\sigma, \sigma \in U\}_{LA}$ donc:

- si $\boldsymbol{g}$ contient la matrice identité, alors la condition du Théorème 2.36 est vérifiée avec $\boldsymbol{r} = \mathbb{R}I$ et $\boldsymbol{s} = \{S_p, p \in U\}_{\mathrm{LA}}$ qui est compact.
- sinon $\boldsymbol{g}$ est un sous-espace de Lie de $\mathbb{R}I \oplus \{S_\sigma,\ \sigma \in U\}$, par suite, on a le résultat.

**Proposition 2.38.** *[11] Si $\boldsymbol{g}$ est une algèbre de Lie résoluble, alors il existe un changement linéaire de coordonnées sous le quel toutes les matrices dans $\boldsymbol{g}$ sont simultanément transformées à la forme triangulaires supérieurs.*

**Proposition 2.39.** *Si $\{A_\sigma, \sigma \in U\}$ est un ensemble compact de matrices de Hurwitz triangulaires supérieurs (ou inférieurs) , alors le système commuté linéaire (2.9) est GUES.*

**Théorème 2.40.** [11]**(Obtention ou non d'un GUES)** *Si $\hat{g}=\{I,A_p;p\in U\}_{\mathrm{LA}}$ ne satisfait la décomposition de Levi, alors il existe deux ensembles de générateurs Hurwitz pour $\hat{g}$ tel que :*

1. *la correspondance du système linéaire commuté ne soit pas GUES;*
2. *la correspondance du système linéaire commuté soit GUES.*

#### 2.2.4.2 Cas non linéaires

Dans cette section, nous allons étudier la stabilité des systèmes commutés non-linéaires en utilisant les critères de stabilité de l'algèbre de Lie.

**Corollaire 2.41. (Localement uniformément exponentiellement stable)** *Soit $\{A_\sigma,\ \sigma\in U\}$ un ensemble compact de matrices de Hurwitz et $\frac{\partial \boldsymbol{f}_\sigma(x)}{\partial x}$ dépend continument de $\sigma$ pour chaque $x$ dans un certain voisinage de l'origine. Si $\boldsymbol{g}=\{A_\sigma,\ \sigma\in U\}_{\mathrm{LA}}$ est résoluble, alors le système commuté (2.4) est localement, uniformément et exponentiellement stable.*

Considérons la famille de systèmes non-linéaires (2.1), $\boldsymbol{f}_\sigma(0){=}0\ \forall\sigma\in U$ et un ensemble de matrices linéarisées $\mathrm{A}_\sigma{=}\frac{\partial \boldsymbol{f}(x)}{\partial x}\backslash_{x=0}$ . On généralise le Corollaire 2.41 par le résultat suivant:

**Corollaire 2.42. (Localement uniformément exponentiellement stable)** *Soit $\{A_\sigma,\sigma\in U\}$ ensemble compact de matrices de Hurwitz et $\frac{\partial \boldsymbol{f}_\sigma(x)}{\partial x}$ dépend continument de $p$ pour chaque $x$ dans un certain voisinage de l'origine. Si $\boldsymbol{g}=\{A_p,\ p\in U\}_{\mathrm{LA}}$ est une somme semi-direct d'un idéal résoluble et un sous-algèbre de Lie compact, alors le système commuté (2.4) est localement uniformément exponentiellement stable.*

L'inconvénient principal des critères de stabilité d'algèbre de Lie est leur applicabilité limitée. Ils fournissent seulement des conditions suffisantes et pas nécessaires pour la stabilité. Ceci peut être vu de la premiére déclaration du Théorème 2.40 et aussi du fait qu'ils impliquent l'existence de fonctions de Lyapunov quadratique commune. Cette propriété est intéressante, mais, comme nous avons vu dans la Section 2.2.2, elle ne nous donne pas tous les GUES pour les systèmes linéaires commutés.

**Remarque 2.43.** La réciproque du Théorème 2.36 n'est pas vraie en général, ainsi, si $\boldsymbol{s}$ n'est pas compact, le système peut être stable ou instable. Ce cas a été examiné dans [2]. Particulièrement, si l'algèbre de Lie $\boldsymbol{g}$ a la dimension au plus 4, alors le problème de la stabilité asymptotique du système (2.9) peut être réduit au problème de stabilité asymptotique d'un système bidimensionnel auxiliaire :

$$x'(t)=\boldsymbol{u}(t)A_1x(t)+(1-\boldsymbol{u}(t))A_2x(t) \tag{2.13}$$

où $A_1$ et $A_2$ sont deux matrices réelles de Hurwitz, $x\in\mathbb{R}^2$ et $\boldsymbol{u}(.)$: $[0;+\infty)\longrightarrow\{0,1\}$ une fonction mesurable arbitrairement commutée. Ce système bidimensionnel a été l'objet de plusieurs études comme la découverte d'une fonction de Lyapunov commune [14], la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de fonctions de Lyapunov quadratiques communes absolues pour la stabilité de deux ordres linéaires.

Mais dans le Chapitre suivant, nous essayerons de trouver une condition suffisante sur les matrices $A_1$, $A_2$ où le système(2.13) est globalement asymptotiquement stable, uniformément pour la fonction de commutation mesurable $\boldsymbol{u}(.)\colon [0;+\infty) \longrightarrow \{0;1\}$ par utilisation d'une nouvelle méthode.

## 2.3 Stabilisation

Dans cette partie, il sera question de deux types de problèmes de stabilisation pour les systèmes linéaires commutés : la recherche d'une loi de commutation stabilisante et la synthèse de correcteurs stabilisant le système indépendamment de la loi de commutation.

### 2.3.1 Loi de commutation stabilisante

Le problème de la synthèse d'une loi de commutation stabilisante est souvent formulé de la façon suivante : quelle restriction doit-on considérer pour la loi de commutation afin de garantir la stabilité du système ? Quand la commutation n'est pas contrôlée, la recherche des conditions sur la loi de commutations afin que le SLC soit asymptotiquement stable s'est faite principalement selon deux approches. La première consiste à faire dépendre la loi de commutations de l'état du système, c'est-à-dire, que l'on partage l'espace d'état du système en plusieurs régions délimitées par des frontières, où chaque région correspond à un mode du système et les commutations correspondent aux transitions des frontières. Quant à la seconde, elle consiste à commuter relativement lentement, c'est-à-dire à imposer un temps minimal entre deux instants de commutations, afin que le SLC soit asymptotiquement stable. Ici nous allons nous limiter à la restriction de l'espace d'état, lorsque la loi de commutation représente une commande.

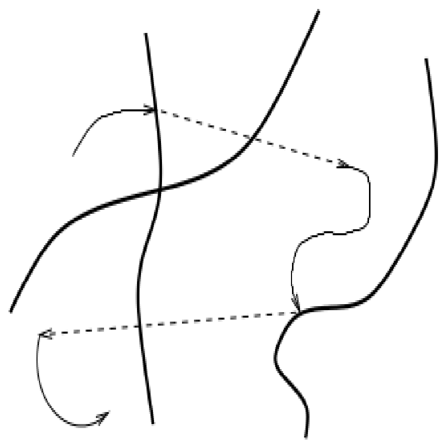

**Figure 2.5.**

**Théorème 2.44.** *[25]S'il existe une séquence de commutations stabilisante, alors il existe un sous-système*

$$x' = A_\sigma x, \forall \sigma \in U$$

*tel que au moins une valeur propre de $A_\sigma + A_\sigma^T$ soit un nombre réel négatif.*

**Théorème 2.45.** *[22][23]Soit $A = \{A_1, \ldots\ldots A_n\}$ un ensemble de matrices instables. Une condition suffisante pour l'existence de $\sigma(t)$ telle que SLC (2.9) soit stable est qu'il existe une combinaison convexe stable des matrices $A_p$ , c'est-à-dire, qu'il existe*

$$\alpha_p > 0, \sum_{p=1}^{n} \alpha_p = 1$$

*tel que,*

$$A_{\mathrm{eq}} = \sum_{p=1}^{n} \alpha_p A_p$$

*soit une matrice stable.*

**Remarque 2.46.** Ce résultat repose donc sur l'existence d'une combinaison convexe stable des matrices $A_p$, $p = 1, \ldots .n$. Cependant, trouver la combinaison convexe lorsqu'elle existe est un problème trés difficile. De plus, l'existence d'une telle combinaison convexe n'est pas une condition nécessaire, et donc, il se peut qu'il existe une loi de commutations stabilisante alors qu'il n'existe pas de combinaison convexe stable. Des conditions qui sont à la fois nécessaires et suffisantes existent pour le cas des systèmes de deuxième ordre [25].

### 2.3.2 Système feed-beck ou retour d'information

**Définition 2.47.** *Un contrôle $u$ en boucle fermée, appelé aussi une rétroaction, ou un bouclage, ou encore un feedback, est une application $x \longmapsto u = \gamma(x)$ définie sur l'espace d'état $\mathbb{R}^m$ à valeur dans l'ensemble des contrôles admissibles $\mathcal{U}$.*

Le problème de stabilisation (ou régulation) du système

$$x' = \boldsymbol{f}(x, u), x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$$

consiste à maintenir ce système près d'un point d'équilibre $x_0$. Il s'agit donc de construire une loi de contrôle $u = \gamma(x)$ telle que $x_0$ soit un équilibre asymptotiquement stable du système en boucle fermée. (voir Figure 2.6).

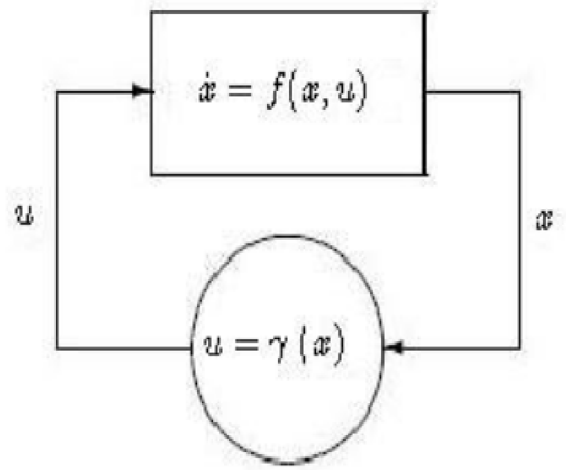


**Figure 2.6.**

**Définition 2.48.** *Le système $x' = Ax + Bx$ est dit stabilisable (par retour d'état linéaire, ou par feedback linéaire, ou aussi par régulateur linéaire) s'il existe une matrice $K \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ tel que le système bouclé par le feedback $u = Kx$ : c'est-à-dire*

$$x' = (A + BK)x$$

*soit asymptotiquement stable, autrement dit la matrice $(A + BK)$ est de Hurwitz.*

*La matrice de feedback $K$ s'appelle les gains.*

Les résultats de la stabilité pour les systèmes à commutations de cette nature sont:

#### 2.3.2.1 La passivité

Considérons, le système de contrôle suivant:

$$\begin{cases} x' = \boldsymbol{f}(x,u), x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ y = \boldsymbol{h}(x), y \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

**Définition 2.49.** *On appelle gain statique d'un système, son amplification en régime continue.*

**Définition 2.50.** *On appelle passivité, la propriété de ce système caractérisé par l'existence d'une fonction définie positive, continument différentiable $V$:$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et une fonction $W$:$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie positive telle que:*

$$\frac{\partial V}{\partial x} \boldsymbol{f}(x,u) \leq -W(x) + u^T \boldsymbol{h}(x) \tag{2.14}$$

Des systèmes passifs surgissent fréquemment dans une variété d'applications, par exemple, dans les modèles de circuits électriques et des dispositifs mécaniques.

**Définition 2.51.** *Une fonction non-linéaire $\varphi$ est de type secteur $[k_1; k_2]$ lorsque*

$$\forall y \neq 0, k_1 y \leq \varphi(y) \leq k_2 y$$

**Définition 2.52.** *Un système linéaire à circuit fermé par une non-linéaire statique $u = -\varphi(y)$ est de la forme*

$$\begin{cases} x' = Ax - B\varphi(y) \\ y = Cx \end{cases} \tag{2.15}$$

Supposons que l'inégalité (2.14) est vraie, donc pour tout $k \geq 0$, le système à circuit fermé obtenu pour $u = -ky$ est asymptotiquement stable. Sa fonction de Lyapunov est la fonction $V$, dont la dérivée le long des solutions vérifie :

$$V'(x) < -W(x) - y^T k y. \tag{2.16}$$

Autrement dit,V est une fonction de Lyapunov commune pour la famille des systèmes à circuit fermés correspondants à toutes les matrices de gain de retour d'information définies non positives. Il s'ensuit que le système commuté produit par cette famille est uniformément asymptotiquement stable (GUAS si V est radialement illimité).

La fonction $V$ sert aussi d'une fonction de Lyapunov commune pour tous les systèmes de retour d'information non-linéaires obtenus en prenant $u=-\varphi(y)$ où $\varphi$ vérifie :

$$y^T\varphi(y)>0, \forall y\neq 0.$$

Dans le cas d'une seule entrée-sortie (SISO), ceci se réduit au secteur

$$0<y\varphi(y), \forall y \tag{2.17}$$

Pour les systèmes linéaires, il y a une condition de domaine de fréquence très utile pour la passivité en termes de concept d'une fonction réelle positive que nous définissons maintenant. Nous allons limiter notre discussion au systèmes SISO, bien que les résultats semblables se tiennent pour des systèmes généraux.

#### 2.3.2.2 Fonction réelle positive

**Définition 2.53.** *Une fonction de transfert est un modèle mathématique de la relation entre l'entrée u et la sortie x d'un système linéaire souvent invariant. Elle est la transformée de Laplace de sa réponse impulsionnelle.*

**Exemple 2.54.** Considérons le système SISO représenté par :

$$\begin{cases} x'=Ax+Bu \\ y=\left(\begin{smallmatrix} a \\ 1 \end{smallmatrix}\right)^T x \end{cases} ; C=\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}^T, A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -32 & -12 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculons la fonction de transfert: $\boldsymbol{g}(s)=C(\mathrm{sI}-A)^{-1}B$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}(s) &= (\ a,\ \ 1\ )\begin{pmatrix} s & -1 \\ 32 & s+12 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (\ a,\ \ 1\ )\times\frac{1}{(s+8)(s+4)}\begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ -32 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{s+a}{(s+8)(s+4)} \end{aligned}$$

Les solutions du dénominateur (pôles) de $\boldsymbol{g}$ sont $-8$ et $-4$ et la solution de son numérateur (zéro) est $-a$.

**Définition 2.55.** *Une fonction de transfert* $\boldsymbol{g}\colon \mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ *est dite : réelle positive si* $s\in\mathbb{R}$ *implique* $\boldsymbol{g}(s)\in\mathbb{R}$ *et* $\mathfrak{R}_e(s)\geq 0$ *et* $\mathfrak{R}_e(\boldsymbol{g}(s))\geq 0$*. Elle est dite réelle strictement positive si* $\boldsymbol{g}(s\text{-}\varepsilon)$ *est une réelle positive* $\forall\varepsilon>0$.

*Une fonction réelle positive à tous ces pôles dans un demi-plan férmé si tous les pôles sont dans un demi-plan ouvert. Donc, il suffit de vérifier l'inégalité* $\mathfrak{R}(\boldsymbol{g}(s))\geqslant 0$ *le long des axes imaginaires.*

Soit le système linéaire de temps invariant suivant :

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = C\,x \end{cases}$$

où $A$ est une matrice Hurwitz et

$$\boldsymbol{g}(s) = C(\mathrm{sI} - A)^{-1}B$$

est une fonction de transfert réelle strictement positive. L'existence d'une matrice symétrique définie positive P pour ce système est garantie par le célèbre lemme de Kalman-Yakubovich-Popov suivant :

**Lemme 2.56.** *Si un système linéaire*

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

*admet deux matrices symétriques définies positives $P$ et $Q$ qui satisfont les deux équations suivantes:*

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= -Q \\ PB &= C^T \end{aligned}$$

*alors le système est passif avec fonction de stockage interne*

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T P x$$

*et comme de terme de dissipation*

$$g = \frac{1}{2} x^T Q x$$

**Démonstration.** on a: $A^T P + PA = -Q$

Posons $V(x) = \frac{1}{2} x^T P x$ et calculons sa dérivée.

$$\begin{aligned} V'(x) &= \frac{1}{2}\left(x'^T P x + x^T P x'\right) \\ &= \frac{1}{2}((Ax + Bu)^T P x + x^T P (Ax + Bu)) \\ &= \frac{1}{2} x^T (A^T P + PA) x + \frac{1}{2}((Bu)^T P x + x^T P B u) \\ &= -\frac{1}{2} x^T Q x + u B^T P x. \end{aligned}$$

En posant $y = B^T P x = Cx$. On obtient :

$$V'(x) = -\frac{1}{2} x^T Q x + u y = u y - g$$

de telle sorte que le système est passif avec

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T P x \,\text{et}\, g = \frac{1}{2} x^T Q x.$$

□

En général, on suppose que la fonction de stockage est simplement définie non négative, mais dans le cas de passivité stricte, on la suppose définie positive.

**Définition 2.57.** *Un système linéaire est dit stable de manière absolue vis-à-vis de la fonction non-linéaire $\varphi$ de secteur $[k_1; k_2]$, si le système résultant est stable au sens de Lyapunov quel que soit $\varphi(y) \in [k_1; k_2]$.*

Nous disons que si la fonction de transfert est une réelle strictement positive, alors les systèmes à circuit fermés pour tous les gains de retour d'information non positifs ($u = -ky$, $\forall k \geq 0$) partagent une fonction de Lyapunov commune quadratique. Pour les systèmes de dimension $n \leq 2$, l'inverse est aussi vraie c'est-à-dire l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune implique que la fonction de transfert est une fonction réelle strictement positive.

Donc,

- la correspondance du système linéaire commuté est GUES;
- Ce même résultat s'étend immédiatement, aux systèmes de retour d'information non-linéaires
$$x' = Ax - B\varphi(Cx) \tag{2.18}$$
où $\varphi$ satisfait (2.17).

Si la fonction de transfert $\boldsymbol{g}$ n'est pas une réelle strictement positive, mais la fonction

$$\frac{1 + k_2\boldsymbol{g}}{1 + k_1\boldsymbol{g}} \tag{2.19}$$

est une réelle strictement positive pour $k_2 \geq k_1 \geq 0$, où $k_1$ est un gain de stabilisation. Dans ce cas une fonction de Lyapunov quadratique commune existe pour la famille de systèmes (2.18) telle que:

$$k_1 y^2 \leq y\varphi(y) \leq k_2 y^2 \tag{2.20}$$

Ce résultat est d'habitude appelé critère de cercle, le lieu de $\boldsymbol{g}$ se trouve à l'extérieur du disque centré à l'axe réel. Ce disque croise l'axe réel aux points $\left(-\frac{1}{k_1}, 0\right)$ et $\left(-\frac{1}{k_2}, 0\right)$.

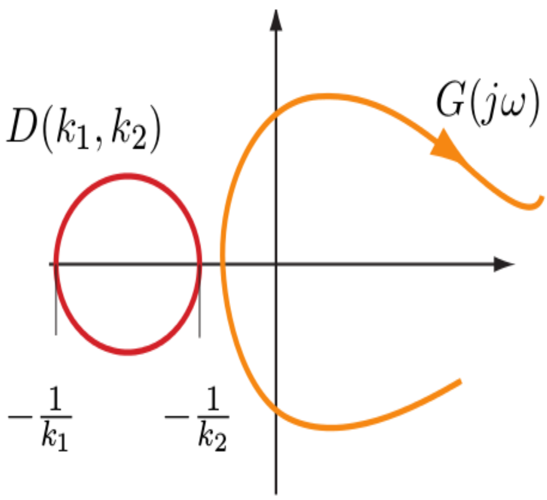


**Figure 2.7.**

Pour $k_1 = 0$, ce disque devient le demi-plan $\left\{s\colon \Re_e(s) \leq -\frac{1}{k_2}\right\}$.

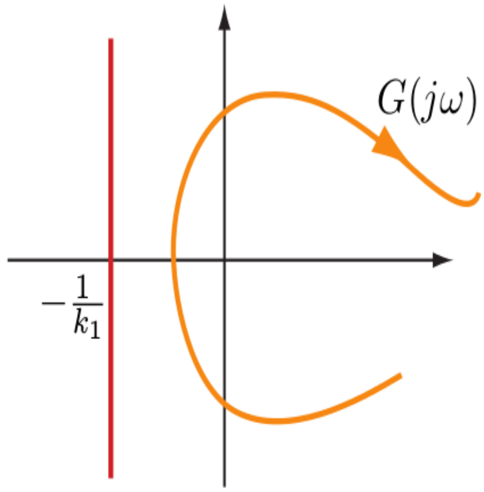


**Figure 2.8.**

Le problème d'analyse de la stabilité du système (2.18) pour toutes les non linéarités $\varphi$ trouvant dans un certain secteur donné comme (2.17) ou (2.20) est celui de la stabilité absolue célèbre. Les conditions qui mènent à l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique pour ce type de système est en général trop restrictives. Le critère de Popov fournit des conditions de domaine de fréquence moins conservatrices pour la stabilité absolue. Une version de ce critère peut être exposée comme suit :

**Proposition 2.58.** *Si $\boldsymbol{g}$ a un pôle au zéro et le reste dans le demi-plan gauche ouvert on a:*

1. *Si $(1+\alpha s)\boldsymbol{g}(s)$ est une fonction réelle positive pour $\alpha \geq 0$, alors le le système (2.18) est globalement asymptotiquement stable pour toute fonction $\varphi$ qui satisfait $0 \leq y\varphi(y)\forall y \neq 0$;*
2. *sinon, si la fonction $(1+\alpha s)\boldsymbol{g}(s)$ est une réelle strictement positive pour tout $\alpha \geq 0$, alors la condition (2.17) est suffisante.*

Quand le critère de Popov s'applique, alors il existe une fonction de Lyapunov pour le système à circuit fermé en forme d'un terme quadratique plus un intégral de la non linéarités. Puisque cette fonction de Lyapunov dépend explicitement de $\varphi$, donc une fonction de Lyapunov commune n'existe pas en général. Autrement dit, la commutation entre différents gains de retour d'information négatifs ou de secteur non linéaire peut causer l'instabilité d'un système.

**Théorème 2.59.** *Soit $G(s) = C(s\mathrm{I} - A)^{-1}B$ une fonction de transfert correspondant à un système qui est à la fois commandable,*
*rang($B$ $AB$ .......$A^{n-1}B$)=$n$;*
*et observable ($C^T$ $A^TC^T$.......$(A^T)^{n-1}C^T$)=$n$;*
*$(G(s))$ est strictement réelle positive. C'est-à-dire*

$$\exists P > 0 \text{ et } Q > 0 \text{ telle que } A^TP + PA = -Q \text{ et } PB = C^T.$$

**Théorème 2.60.** *[11]Considérons le système linéaire à commutation produit :*

$$x' = (A + BK_\sigma C)x \tag{2.21}$$

*Supposons que $A$ est une matrice de Hurwitz telle que $\|K_\sigma\| \leq 1$ pour tout $\sigma \in U$.*

*Alors le système (2.21) est GUAS si $\|CB(sI - A)^{-1}\|_\infty < 1$ où*

$$\|G\|_\infty = max_{\Re(s)=0} \sigma_{max}(G(s))$$

# Chapitre 3

# Conditions de stabilité des systèmes linéaires commutés plans

Dans ce chapitre nous faisons l'étude détaillée du papier [4] de Balde, Boscain et Masson. Dans ce papier les auteurs ont étudié le problème de stabilité des systèmes commutés linéaires de la forme :

$$x'(t) = u(t)A_1x(t) + (1 - u(t))A_2x(t)$$

où les matrices réelles $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sont de valeurs propres à parties réelles négatives et $u\colon [0; +\infty] \longrightarrow \{0, 1\}$ est une fonction mesurable. Ils y ont donné des conditions nécessaires et suffisantes, dépendant d'invariants des matrices $A_1$ et $A_2$, sous lesquels le système est asymptotiquement stable pour des fonctions de commutation arbitraires $u$. Ils ont simplifié, unifié ces conditions de stabilités en les reformulant en termes de nouvelles paramètres et aussi réduit les cas à étudier de 20 à 4 qui sont les suivants :

***S*₁.** Existence d'une fonction de Lyapunov quadratique équivalente à celle donnée dans [10]. Elle est seulement une condition suffisante pour GUAS.

***S*₂.** Existence de $v \in \{0, 1\}$ tel que $vA_1 + (1 - v)A_2$ ait une valeur propre réelle positive. Dans ce cas le système est instable.

***S*₃.** Existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune non stricte. Le système est seulement uniformement stable, mais pas GUAS.

***S*₄.** L'analyse de stabilité du système est réduite à l'étude d'une seule trajectoire appelée la pire trajectoire.

- Si elle tend à l'origine, alors le système est GUAS.
- Si elle est périodique, alors le système est uniformément stable mais pas GUAS.
- Si elle diverge, alors le système est instable.

## 3.1 Les notions de stabilité

Dans cette sous section nous rappelons quelques notions classiques de stabilité qui seront utilisées dans la suite. Pour $\delta > 0$, soit $B_\delta$ la boule d'unité de rayon $\delta$, centrée à l'origine. Notons par $U$, l'ensemble des fonctions mesurables définies sur $[0, +\infty)$ à valeur dans $\{0, 1\}$. Etant donné $x_0 \in \mathbb{R}^2$, nous notons par $\gamma_{x_0,u(.)}(.)$ la trajectoire du système (2.13) issu de $x_0$ et correspondant au contrôle $u$.

**Définition 3.1. (Instable ou illimité)** *On dit que le système (2.13) est illimité à l'origine s'il existe* $x_0 \in \mathbb{R}^2$ *et* $u(.) \in U$ *tel que* $\gamma_{x_0,u(.)}(t)$ *tend à l'infini quand t va à l'infini.*

**Définition 3.2. (Uniformement stabe)** *On dit que le système (2.13) est uniformement stable à l'origine si pour chaque* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que* $\gamma_{x_0,u(.)}(t) \in B_\varepsilon$ *pour chaque t> 0 et chaque* $x_0 \in B_\delta$.

**Définition 3.3. (Globalement uniformement asymptotiquement stable : GUAS)** *On dit que le système (2.13) est globalement, uniformement et asymptotiquement stable à l'origine (GUAS) s'il est uniformément stable et globalement attractive, c'est à dire, pour tous* $\delta_1,\delta_2 > 0$ *il existe* $T>0$ *tel que* $\gamma_{x_0,u(.)}(t) \in B_{\delta_1}$, *pour* $t \geq T$, *pour tout* $u(.) \in U$ *et pour tout* $x_0 \in B_{\delta_2}$.

**Remarque 3.4.** Les propriétés de stabilité du système (2.13) ne changent pas si les fonctions de commutation prennent leurs valeurs dans $[0,1]$ au lieu dans $\{0;1\}$[7].

Dans la suite, nous allons nommer le système commuté avec $u(.)\colon [0,+\infty) \longrightarrow [0,1]$.

**Lemme 3.5.** *[14] Le système(2.13) avec* $u\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \{0,1\}$ *est GUAS (respectivement uniformément stable,respectivement illimité) si et seulement si le système convexe (2.13) est GUAS (respectivement uniformément stable, respectivement illimité).*

Le système (2.13) ne dépend pas du paramétrage des courbes intégrales de $A_1x$ et $A_2x$ comme l'atteste le lemme suivant.

**Lemme 3.6. (Invariance des propriétés de stabilité entre ($\boldsymbol{A_i}$ et $\boldsymbol{A_i/_{\alpha_i}\ \forall \alpha_i > 0}$) )**

*Si le système commuté*

$$x'(t) = u(t)A_1x(t) + (1-u(t))A_2x(t)$$

*où* $u(.)\colon [0, +\infty) \longrightarrow \{0, 1\}$ *a l'une des propriétés de la stabilité données dans les définitions précédentes, alors la même propriété de stabilité reste valable pour le système*

$$x'(t) = u(t)(A_1/\alpha_1)x(t) + (1-u(t))(A_2/\alpha_2) \text{ pour tout } \alpha_1, \alpha_2 > 0$$

**Définition 3.7. (Fonction de Lyapunov( FL) commune )** *Une fonction de Lyapunov commune* $V\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *du système commuté de la forme (2.13) est une fonction continue telle que V(.) est définie positive (c'est à dire* $V(x) > 0\ \forall x \neq 0$ *et* $V(0) = 0$*) et décroit strictement le long des trajectoires non constantes.*

**Définition 3.8. (Fonction de Lyapunov Commune non stricte)** *Une fonction* $V\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *définie positive est une fonction de Lyapunov commune non stricte si V(.) ne croit pas le long des solutions non constantes.*

**Définition 3.9. (Fonction de Lyapunov Quadratique Commune )** *Une fonction de Lyapunov quadratique commune est une fonction de la forme* $V(x) = x^TPx$ *où P est une matrice symétrique définie positive et les matrices* $A_1^TP + PA_1$ *et* $A_2^TP + PA_2$ *sont définies négatives.*

Rappelons que pour les systèmes de type (2.13), l'existence d'une $FL$ est équivalente à GUAS (voir [4]). Par contre l'existence de $FL$ non strict garantit la stabilité uniforme de (2.13).

## 3.2 Conditions de stabilité de Baldé Boscain et Masson

### 3.2.1 Définition et notations

Nous rappelons que $\det(X)$ et $\mathrm{Tr}(X)$ désignent respectivement le déterminant et la trace d'une matrice $X$. Nous définissons $\delta_X := \mathrm{Tr}(X)^2 - 4\det(X)$ et $\Gamma(X,Y) = \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(X)\mathrm{Tr}(Y) - \mathrm{Tr}(XY))$ où $X, Y \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Au moyen de ces invariants nous pouvons définir les invariants suivants associés à (2.13) :

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \begin{cases} \frac{\mathrm{Tr}(A_1)}{\sqrt{|\delta_{A_1}|}} \text{ si } \delta_{A_1} \neq 0 \\ \frac{\mathrm{Tr}(A_1)}{2} \text{ si } \delta_{A_1} = 0 \end{cases} \\
\tau_2 &= \begin{cases} \frac{\mathrm{Tr}(A_2)}{\sqrt{|\delta_{A_2}|}} \text{ si } \delta_{A_2} \neq 0 \\ \frac{\mathrm{Tr}(A_2)}{2} \text{ si } \delta_{A_2} = 0 \end{cases} \\
k &= \frac{2\tau_1\tau_2}{\mathrm{Tr}(A_1)\mathrm{Tr}(A_2)}\left(\mathrm{Tr}(A_1A_2) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A_1)\mathrm{Tr}(A_2)\right) \\
\Delta &= 4(\Gamma(A_1,A_2)^2 - \Gamma(A_1,A_1)\Gamma(A_2,A_2)) \\
\mathcal{R} &= \frac{2\Gamma(A_1,A_2) + \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)}}\exp(\tau_1 t_1 + \tau_2 t_2) \\
t_i &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\mathrm{Tr}(A_1)\mathrm{Tr}(A_2)(k\tau_i + \tau_{3-i})}{2\tau_1\tau_2\sqrt{\Delta}} \text{ si } \delta_{A_i} < 0 \\ \mathrm{arctanh}\frac{2\tau_1\tau_2\sqrt{\Delta}}{\mathrm{Tr}(A_1)\mathrm{Tr}(A_2)(k\tau_i - \tau_{3-i})} \text{ si } \delta_{A_i} > 0 \\ \frac{2\sqrt{\Delta}}{\left(\mathrm{Tr}(A_1A_2) - \frac{\mathrm{Tr}(A_1)\mathrm{Tr}(A_2)}{2}\right)} \text{ si } \delta_{A_i} = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} +1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

**Remarque 3.10.** Pour toute matrice $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, on a $\Gamma(X,X) = \det(X)$. De plus on a :

$\mathcal{B}(X, Y) = 4\mathrm{Tr}(XY) - 2\mathrm{Tr}(X)\mathrm{Tr}(Y)$ donc le $\mathrm{sign}(k) = \mathrm{sign}(\mathcal{B}(A_1, A_2))$. Ainsi nous pourrons remarquer que si $A_1$ et $A_2$ sont Hurwitz alors $\tau_i < 0$ pour $i = 1, 2$ et $\mathrm{sign}(\Gamma(A_1, A_2)) = \mathrm{sign}(\tau_1\tau_2 - k)$.

### 3.2.2 Le théorème de stabilité de Baldé Boscain et Masson

Dans cette section, nous exposons le résultat principal du papier [4] puis en donnons une preuve détaillée.

**Théorème 3.11. (Théorème de stabilité)** *[4]*

1. *Si les conditions suivantes*

$$\begin{cases} \Gamma(A_1, A_2) > -\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)} \\ \mathrm{Tr}(A_1A_2) > -2\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)} \end{cases} (S_1)$$

   *sont satisfaite alors, le système(2.13) admet une FL quadratique.*

2. *Si*

$$-\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)} < \Gamma(A_1, A_2) \leq \sqrt{\det(A_1)\det(A_2)}$$

   *alors dans ce cas, la condition* $\mathrm{Tr}(A_1A_2) > -2\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)}$ *est automatiquement satisfaite. Par consequent, le système(2.13) admet une FL quadratique.*

3. *Si*

$$\Gamma(A_1, A_2) < -\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)} \ (S_2)$$

   *alors le système est illimité.*

4. *Si*

$$\Gamma(A_1, A_2) = -\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)} \ (S_3)$$

   *alors, le système est uniformement stable, mais pas GUAS.*

5. *Si*

$$\begin{cases} \Gamma(A_1, A_2) > \sqrt{\det(A_1)\det(A_2)} \\ \mathrm{Tr}(A_1A_2) \leq -2\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)} \end{cases} (S_4)$$

   *alors, le système est GUAS, uniformement stable ou instable respectivement si* $\mathcal{R} < 1$, $\mathcal{R} = 1$, $\mathcal{R} > 1$.

Le corollaire suivant provient de $(S_1)$.

**Corollaire 3.12.** *Si* $\det([A_1, A_2]) \geq 0$, *alors le système (2.13) admet une FL quadratique.*

**Remarque 3.13.** Dans le cas diagonalisable $\delta_{A_1}$ et $\delta_{A_2}$ sont différent de zéro, les paramètres $\tau_1$, $\tau_2$ et $k$ sont invariants sous la trasformation $(A_1, A_2) \longrightarrow (A_1/\alpha_1, A_2/\alpha_2)$ pour tout $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Ceci n'est pas vrai dans le cas non diagonalisable.

Remarquons cependant que dans les deux cas les conditions de stabilité du Théorème 3.11 ne dépendent pas de la transformation de coordonnées ou des transformations du type $(A_1, A_2) \longrightarrow (A_1/\alpha_1, A_2/\alpha_2)$ que nous appellerons regraduation dans la suite. Ceci est néanmoins vrai pour le cas particulier de la fonction $\mathcal{R}$.

## 3.3 La preuve du théorème de stabilité.

### 3.3.1 Les formes normales

Le but de cette section est de réduire tous les choix possibles des matrices $A_1$ et $A_2$ aux formes normales appropriées, obtenues après transformations de coordonnées et regraduation des matrices (voir Lemme 3.6 et Remarque 3.13). Ces matrices dépendent directement des coordonnées des paramètres $\det(A_1)$, $\det(A_1)$, $\tau_1$, $\tau_2$, $k$, $\Gamma, \delta_{A_1}, \delta_{A_2}, \Delta$ définis ci-dessus. Les formes normales utilisées ici décrivent toutes les situations possibles des systèmes commutés bidimensionnel. Ces formes couvrent en même temps le cas diagonalisable étudié dans [4] et le cas non diagonalisable étudié dans [5]. Ils joueront un rôle clé dans la preuve.

**Lemme 3.14. (Formes normales de $\mathbf{A_1}$ et $\mathbf{A_2}$.)** *Nous avons les cas suivants selon le rang de* $[A_1, A_2]$

1. *Si* $\det([A_1, A_2]) \neq 0$ *alors*
$$A_1 = \begin{pmatrix} \tau_1 & 1 \\ \operatorname{sign}(\delta_{A_1}) & \tau_1 \end{pmatrix}$$

   a) *Si* $\det([A_1,\ A_2]) < 0$, *alors il existe* $F \in \mathbb{R}$, $|F| > 1$ *telle que* $F + \frac{\operatorname{sign}(\delta_1\delta_2)}{F} = 2k$
   *et* $A_2$ *a la forme*
$$A_2 = \begin{pmatrix} \tau_2 & F \\ \operatorname{sign}(\delta_2)/F & \tau_2 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

   b) *Si* $\det([A_1, A_2]) > 0$, *alors* $\delta_{A_i} > 0$, *pour* $i = 1, 2$, $k \in (-1, 1)$ *et* $A_2$ *a la forme*
$$A_2 = \begin{pmatrix} \tau_2 + \sqrt{1-k^2} & k \\ k & \tau_2 - \sqrt{1-k^2} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

2. *Si* $\operatorname{rang}([A_1, A_2]) = 1$, *alors il est possible de trouver un changement linéaire des coordonnées qui diagonalise* $A_1$ *et rend* $A_2$ *triangulaire supérieure.*

3. *Si* $[A_1, A_2] = 0$, *alors* $\operatorname{sign}(\delta_{A_1}) = \operatorname{sign}(\delta_{A_2})$.

   - *Si* $\delta_{A_i} < 0$ *ou* $\delta_{A_i} > 0$ *pour i=1,2 alors il est possible de trouver un changement linéaire de coordonnées et une renormalisation des formes* (3.1) *(respectivement* (3.2)*) avec* $F = \pm 1$ *(respectivement* $k = \pm 1$*).*

- *Si $\delta_{A_1} = \delta_{A_2} = 0$, alors $A_1$ et $A_2$ peuvent être mis sous la forme triangulaire supérieur où les éléments de $A_i$ sont égaux à $\tau_i$ sur la diagonale pour $i=1,2$.*

**Démonstration.** du Lemme 3.14

Nous prouverons le lemme juste dans le cas $\det([A_1, A_2]) \neq 0$, la preuve dans le cas où $\det([A_1, A_2]) = 0$ est analogue. Notons que ce lemme était prouvé dans [4] quand $\delta_{A_1}, \delta_{A_2} < 0$ et dans [5] dans le cas où $\delta_{A_1}\delta_{A_2} = 0$. Donc, nous pouvons assumer $\delta_{A_1} > 0$ ou $\delta_{A_2} > 0$. Considérons d'abord le cas $\delta_{A_1} > 0$. Dans ce cas, nous pouvons trouver un système de coordonnées tel que :

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $\lambda_1 < \lambda_2$. Le discriminant de $A_1$ est

$\delta_{A_1} = (\lambda_2 - \lambda_1)^2$ et celui de $A_2$ est $\delta_{A_2} = (a-b)^2 + 4\text{bc}$, qui peut être positif ou négatif. Nous avons :

$$\begin{aligned} [A_1, A_2] &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_1 \\ c\lambda_2 & d\lambda_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_2 \\ c\lambda_1 & d\lambda_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & b(\lambda_1 - \lambda_2) \\ -c(\lambda_1 - \lambda_2) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\det([A_1, A_2]) = bc(\lambda_1 - \lambda_2)^2$$

$$\begin{aligned} \delta_{[A_1, A_2]} &= \mathrm{Tr}([A_1, A_2])^2 - 4\det([A_1, A_2]) \\ &= -4bc(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \end{aligned}$$

Calculons $k$:

posons $m = \mathrm{Tr}(A_1A_2) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A_1)\mathrm{Tr}(A_2)$

$$\begin{aligned} A_1A_2 &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_1 \\ c\lambda_2 & d\lambda_2 \end{pmatrix} \\ \mathrm{Tr}(A_1A_2) &= a\lambda_1 + d\lambda_2 \\ n &= \mathrm{Tr}(A_1)\mathrm{Tr}(A_2) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)(a + d) \\ &= a\lambda_1 + d\lambda_1 + a\lambda_2 + d\lambda_2 \\ m &= \frac{1}{2}(a\lambda_1 - d\lambda_1 + d\lambda_2 - a\lambda_2) \\ &= \frac{1}{2}(-\lambda_1(d-a) + \lambda_2(d-a)) \\ &= \frac{(d-a)(\lambda_2 - \lambda_1)}{2}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{cases} \tau_1 = \frac{\mathrm{Tr}(A_1)}{\sqrt{|\delta_{A_1}|}} \\ \tau_2 = \frac{\mathrm{Tr}(A_2)}{\sqrt{|\delta_{A_2}|}} \end{cases} \Longrightarrow \tau_1\tau_2 = \frac{\mathrm{Tr}(A_1)Tr(A_2)}{\sqrt{|\delta_{A_1}||\delta_{A_2}|}}$$

$$\begin{aligned} k &= \frac{2m\mathrm{Tr}(A_1)\mathrm{Tr}(A_2)}{\sqrt{|\delta_{A_1}\delta_{A_2}|}\,\mathrm{Tr}(A_1)\mathrm{Tr}(A_2)} \\ &= \frac{2(d-a)(\lambda_2-\lambda_1)}{2(\lambda_2-\lambda_1)\sqrt{|\delta_{A_2}|}} \\ &= \frac{d-a}{\sqrt{|\delta_{A_2}|}} \end{aligned}$$

Supposons $\det([A_1, A_2]) < 0$ et considérons la transformation linéaire

$$T = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{-b}{a}} & \sqrt{\frac{-b}{a}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{qui diagonalise } [A_1, A_2].$$

Donc, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{|\delta_{A_1}|}} T^{-1}A_1T &= \frac{2}{\sqrt{|\delta_{A_1}|}} \times \frac{1}{\det(T)} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{\frac{-b}{a}} \\ -1 & -\sqrt{\frac{-b}{a}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{-b}{a}} & \sqrt{\frac{-b}{a}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{\sqrt{|\delta_{A_1}|}} \times \frac{1}{-2\sqrt{\frac{-b}{a}}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2\sqrt{\frac{-b}{a}} \\ -\lambda_1 & -\lambda_2\sqrt{\frac{-b}{a}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{-b}{a}} & \sqrt{\frac{-b}{a}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \times \frac{1}{-\sqrt{\frac{-b}{a}}} \times \sqrt{\frac{-b}{a}} \begin{pmatrix} -(\lambda_1+\lambda_2) & \lambda_1-\lambda_2 \\ \lambda_1-\lambda_2 & -(\lambda_1+\lambda_2) \end{pmatrix} \\ \text{or } \tau_1 &= \frac{\mathrm{Tr}(A_1)}{\sqrt{|\delta_{A_1}|}} = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} \text{ donc} \\ \frac{2}{\sqrt{|\delta_{A_1}|}} T^{-1}A_1T &= \begin{pmatrix} \tau_1 & 1 \\ 1 & \tau_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De manière analogue on prouve que :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{|\delta_{A_2}|}} T^{-1}A_2T &= \frac{2}{\sqrt{|\delta_{A_2}|}} \times \frac{1}{\det(T)} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{\frac{-b}{a}} \\ -1 & -\sqrt{\frac{-b}{a}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{-b}{a}} & \sqrt{\frac{-b}{a}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tau_2 & \frac{\mathrm{sign}(\delta_{A_2})}{F} \\ F & \tau_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $F$ satisfait l'équation $F+\frac{\mathrm{sign}(\delta_{A_2})}{F}=2k$ et de plus nous pouvons assumer que $|F|\geq 1$ éventuellement échanger les coordonnés de reference. Si $\delta_{A_1}<0$, alors $\delta_{A_2}>0$ et donc nous pouvons changer les rôles de $A_1$ et $A_2$, reprendre ce processus jusqu'à l'obtention de la forme suivante :

$$A_1=\begin{pmatrix} \tau_1 & \frac{\mathrm{sign}(\delta_{A_1})}{F} \\ F & \tau_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2=\begin{pmatrix} \tau_2 & 1 \\ \mathrm{sign}(\delta_{A_2}) & \tau_2 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\begin{array}{rcl}
[A_1,A_2] & = & A_1A_2-A_2A_1 \\
A_1A_2 & = & \begin{pmatrix} \tau_1 & \frac{\mathrm{sign}(\delta_{A_1})}{F} \\ F & \tau_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tau_2 & 1 \\ \mathrm{sign}(\delta_{A_2}) & \tau_2 \end{pmatrix} \\
 & = & \begin{pmatrix} \tau_1\tau_2+\frac{\mathrm{sign}(\delta_{A_1})\mathrm{sign}(\delta_{A_2})}{F} & \tau_1+\tau_2\frac{\mathrm{sign}(\delta_{A_1})}{F} \\ F\tau_2+\tau_1\mathrm{sign}(\delta_{A_2}) & F+\tau_1\tau_2 \end{pmatrix} \\
A_2A_1 & = & \begin{pmatrix} \tau_2 & 1 \\ \mathrm{sign}(\delta_{A_2}) & \tau_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tau_1 & \frac{\mathrm{sign}(\delta_{A_1})}{F} \\ F & \tau_1 \end{pmatrix} \\
 & = & \begin{pmatrix} \tau_1\tau_2+F & \tau_1+\tau_2\frac{\mathrm{sign}(\delta_{A_1})}{F} \\ F\tau_2+\tau_1\mathrm{sign}(\delta_{A_1}) & \tau_1\tau_2+\frac{\mathrm{sign}(\delta_{A_1})\mathrm{sign}(\delta_{A_2})}{F} \end{pmatrix} \\
[A_1,A_2] & = & \begin{pmatrix} -F+\frac{\mathrm{sign}(\delta_{A_1})\mathrm{sign}(\delta_{A_2})}{F} & 0 \\ 0 & F-\frac{\mathrm{sign}(\delta_{A_1})\mathrm{sign}(\delta_{A_2})}{F} \end{pmatrix} \\
 & = & \begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{sign}(\delta_{A_1})\mathrm{sign}(\delta_{A_2})-F^2}{F} & 0 \\ 0 & \frac{\mathrm{sign}(\delta_{A_1})\mathrm{sign}(\delta_{A_2})-F^2}{F} \end{pmatrix}.
\end{array}$$

D'où,

$$\det([A_1,A_2])=-\frac{(\mathrm{sign}(\delta_{A_1})\mathrm{sign}(\delta_{A_2})-F^2)^2}{F^2}<0.$$

Considérons maintenant le cas

$$\det([A_1,A_2])=\mathrm{bc}(\lambda_1-\lambda_2)^2+4bc>0.$$

Nous avons,

$$\begin{array}{rcl}
bc>0 & \Longrightarrow & \delta_{A_2}=(a-d)^2+4bc>0 \\
|k| & = & \frac{|a-d|}{\sqrt{(a-d)^2+4bc}}<1
\end{array}$$

Dans ce cas, nous utilisons la transformation suivante :

$$U=\begin{pmatrix} \frac{1}{c}\sqrt{bc} & -\frac{1}{c}\sqrt{bc} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{avec} \det(U)=\frac{2}{c}\sqrt{bc} \text{ et } \delta_{A_1}=(\lambda_2-\lambda_1)^2.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{|\delta_{A_1}|}}U^{-1}A_1U &= \frac{2}{\sqrt{|\delta_{A_1}|}}\times\frac{1}{\det(U)}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{c}\sqrt{bc} \\ -1 & \frac{1}{c}\sqrt{bc}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{c}\sqrt{bc} & -\frac{1}{c}\sqrt{bc}\\ 1 & 1\end{pmatrix}\\
&= \frac{2}{\sqrt{|\delta_{A_2}|}}\times\frac{c}{2\sqrt{bc}}\begin{pmatrix}\lambda_1 & -\frac{\lambda_2}{c}\sqrt{bc}\\ -\lambda_1 & \frac{\lambda_2}{c}\sqrt{bc}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{c}\sqrt{bc} & -\frac{1}{c}\sqrt{bc}\\ 1 & 1\end{pmatrix}\\
&= \frac{2}{\lambda_2-\lambda_1}\times\frac{c}{2\sqrt{bc}}\begin{pmatrix}\frac{\lambda_1\sqrt{bc}+\lambda_2\sqrt{bc}}{c} & \frac{-\lambda_1\sqrt{bc}+\lambda_2\sqrt{bc}}{c}\\ \frac{-\lambda_1\sqrt{bc}+\lambda_2\sqrt{bc}}{c} & \frac{\lambda_1\sqrt{bc}+\lambda_2\sqrt{bc}}{c}\end{pmatrix}\\
&= \frac{c\sqrt{bc}}{c\sqrt{bc}(\lambda_2-\lambda_1)}\begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_2 & \lambda_2-\lambda_1\\ \lambda_2-\lambda_1 & \lambda_1+\lambda_2\end{pmatrix}\\
\text{or }\tau_1 &= \frac{\mathrm{Tr}(A_1)}{\sqrt{|\delta_{A_1}|}}=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}, \text{donc}\\
\frac{2}{\sqrt{|\delta_{A_1}|}}U^{-1}A_1U &= \begin{pmatrix}\tau_1 & 1\\ 1 & \tau_1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{|\delta_{A_2}|}}U^{-1}A_2U &= \frac{2}{\sqrt{|\delta_{A_2}|}}\times\frac{c}{2\sqrt{bc}}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{c}\sqrt{bc} \\ -1 & \frac{1}{c}\sqrt{bc}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{c}\sqrt{bc} & -\frac{1}{c}\sqrt{bc}\\ 1 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\tau_2+\sqrt{1-k^2} & k\\ k & \tau_2-\sqrt{1-k^2}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

On peut bien vérifier que $\det([A_1, A_2]) > 0$

$$\begin{aligned}
A_1A_2 &= \begin{pmatrix}\tau_1 & 1\\ 1 & \tau_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau_2+\sqrt{1-k^2} & k\\ k & \tau_2-\sqrt{1-k^2}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\tau_1\tau_2+\tau_1\sqrt{1-k^2}+k & \tau_1k+\tau_2-\sqrt{1-k^2}\\ \tau_2+\sqrt{1-k^2}+\tau_1k & k+\tau_1\tau_2-\tau_1\sqrt{1-k^2}\end{pmatrix}\\
A_2A_1 &= \begin{pmatrix}\tau_2+\sqrt{1-k^2} & k\\ k & \tau_2-\sqrt{1-k^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau_1 & 1\\ 1 & \tau_1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\tau_1\tau_2+\tau_1\sqrt{1-k^2}+k & \tau_2+\sqrt{1-k^2}+k\tau_1\\ \tau_1k+\tau_2-\sqrt{1-k^2} & k+\tau_1\tau_2-\tau_1\sqrt{1-k^2}\end{pmatrix}\\
[A_1, A_2] &= \begin{pmatrix}0 & -2\sqrt{1-k^2}\\ 2\sqrt{1-k^2} & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où,

$$\det([A_1, A_2]) = 4(1-k^2) > 0 \text{ car } |k| < 1 \Longrightarrow 1-k^2 > 0$$

Ce qui conclue la preuve du lemme.

### 3.3.2 Preuve du Théorème de stabilité et du Corollaire 3.12

Pour prouver le Théorème de stabilité et le Corollaire 3.12 nous assumerons, dorénavant que $A_1$ et $A_2$ sont sous les formes normales données par le Lemme 3.15. Pour prouver ce lemme, nous allons faire un calcul direct et l'utilisé pour profiter des conditions de [18] qui décrit les systèmes admettant un $FL$ quadratique.

**Lemme 3.15. (Formes normales de $\mathbf{A_1}$ et $\mathbf{A_2}$ pour utilisé les conditions de [10])** *Pour tout* $\sigma \in [0,1]$, *soient*

$$\phi(\sigma) := \det(\sigma A_1 + (1-\sigma)A_2) \quad \text{et} \quad \varphi(\sigma) = \det(\sigma A_1 + (1-\sigma)A_2^{-1}).$$

*Nous avons :*

$$\phi(\sigma) = \sigma^2 \det(A_1) + 2\sigma(1-\sigma)\Gamma(A_1, A_2) + (1-\sigma)^2 \det(A_2) \tag{3.3}$$

$$\varphi(\sigma) = \frac{1}{\det(A_2)}(\sigma^2 \det(A_1)\det(A_2) + \sigma(1-\sigma)\mathrm{Tr}(A_1A_2) + (1-\sigma^2)) \tag{3.4}$$

**Démonstration.** du Lemme 3.15 posons $d_2 = \det(A_2) = ad - \mathrm{bc}$

$$\begin{aligned}
\forall\sigma[0,1];\, \phi(\sigma) = \det(\sigma A_1 + (1-\sigma)A_2) &= \det\left(\sigma\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + (1-\sigma)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{vmatrix} \sigma\lambda_1 + (1-\sigma)a & b(1-\sigma) \\ c(1-\sigma) & \sigma\lambda_2 + (1-\sigma)d \end{vmatrix} \\
&= \sigma^2\lambda_1\lambda_2 + \sigma(1-\sigma)(\lambda_1 d + \lambda_2 a) + (1-\sigma)^2(ad - cb) \\
&= \sigma^2\det(A_1) + (1-\sigma)^2\det(A_2) + \sigma(1-\sigma)(\lambda_1 d + \lambda_2 a)
\end{aligned}$$

$$\text{or}\, \Gamma(A_1, A_2) = \frac{1}{2}(\lambda_1 d + \lambda_2 a)\, \text{donc}$$

$$\phi(\sigma) = \sigma^2\det(A_1) + 2\sigma(1-\sigma)\Gamma(A_1, A_2) + (1-\sigma)^2\det(A_2)$$

$$\begin{aligned}
A_2^{-1} &= \frac{1}{d_2}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\
\varphi(\sigma) &= \det(\sigma A_1 + (1-\sigma)A_2^{-1}) \\
&= \det\left(\sigma\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{d_2}(1-\sigma)\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{vmatrix} \sigma\lambda_1 + \frac{1}{d_2}(1-\sigma)d & -\frac{1}{d_2}b(1-\sigma) \\ -\frac{1}{d_2}c(1-\sigma) & \sigma\lambda_2 + \frac{1}{d_2}(1-\sigma)a \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sigma^2\lambda_1\lambda_2 + \sigma\lambda_1\frac{1-\sigma}{d_2}a + \sigma\lambda_2\frac{1-\sigma}{d_2}d + \frac{(1-\sigma)^2}{d_2^2}(ad-\mathrm{bc}) \\
&= \frac{1}{d_2}\left(\sigma^2 d_2 \det(A_1) + \sigma(1-\sigma)(a\lambda_1 + d\lambda_2) + (1-\sigma)^2\frac{d_2}{d_2}\right)
\end{aligned}
$$

$$\text{or}\ \mathrm{Tr}(A_1A_2) = a\lambda_1 + d\lambda_2\ \text{donc}$$

$$\varphi(\sigma) = \frac{1}{d_2}(\sigma^2\det(A_1)\det(A_2) + \sigma(1-\sigma)\mathrm{Tr}(A_1A_2) + (1-\sigma)^2)$$

□

**Lemme 3.16.**

Soit $\sigma \in [0,1]$; $\phi(\sigma) > 0 \iff \Gamma(A_1,\ A_2) > 0$ ou bien $\Delta = \Gamma(A_1,\ A_2)^2 - \det(A_1)\det(A_2) < 0$.

**Démonstration.** considérons l'exemple suivant :

Soit a$\in\mathbb{R}_+^*$ $A = x^2 - a$

1. résoudre $A < 0$
2. résoudre $A = 0$
3. ressouder $A > 0$

**Solution.**

$A = 0 \Longrightarrow x^2 - a = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{a}$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-a$ | $-\infty$ | $+$ | $-\sqrt{a}$ 0 | $-$ | $\sqrt{a}$ 0 | $+$ | $+\infty$ |

1.Si $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$, alors $A < 0$;
2.Si $x = -\sqrt{a}$ ou $x = \sqrt{a}$, alors $A = 0$;
3.$x > -\sqrt{a}$ ou $x \leq \sqrt{a}$, alors $A > 0$.

Donc, il suffit de poser $x = \Gamma(A_1, A_2)$ et $a = \det(A_1)\det(A_2)$ et $A = \Delta$ pour avoir :

$$\Delta \leq 0 \Longleftrightarrow -\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)} \leq \Gamma(A_1, A_2) \leq \sqrt{\det(A_1)\det(A_2)}$$

$$\Delta > 0 \Longleftrightarrow \Gamma(A_1, A_2) < -\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)}\ \text{ou bien}\ \Gamma(A_1, A_2) > \sqrt{\det(A_1)\det(A_2)}$$ □

**Lemme 3.17.** *Soit* $\sigma \in [0,1]$.

$$\varphi(\sigma) > 0 \iff \mathrm{Tr}(A_1, A_2) > 0\ \text{ou bien encore}\ \Delta = \mathrm{Tr}(A_1A_2)^2 - 4\det(A_1)\det(A_2) < 0.$$

**Démonstration.** de la condition $S_1$ du Théorème de stabilité.

Rappelons-nous que le résultat principal de [18] dit que le système (2.13) admet une $FL$ quadratique si et seulement si

$$\phi(\sigma) > 0\ \text{et}\ \varphi(\sigma) > 0 \forall\sigma \in [0,1].$$

D'après l'exemple précédent il suffit de poser: $x = \mathrm{Tr}(A_1A_2)$ et $a = 4\det(A_1)\det(A_2)$ pour avoir :

$$\Delta < 0 \Longleftrightarrow -2\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)} < \mathrm{Tr}(A_1A_2) < 2\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)}$$

$$\Delta \geq 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Tr}(A_1A_2) \leq -2\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)} \text{ ou } \mathrm{Tr}(A_1A_2) \geq 2\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)}$$

Donc, nous avons la condition $S_1$ du théorème

$$\Delta < 0 \iff \begin{cases} \Gamma(A_1, A_2) > -\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)} \\ \mathrm{Tr}(A_1A_2) > -2\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)} \end{cases}.$$

Ce qui montre que nous avons une $FL$ commune quadratique, donc le sytème ((2.13)) est GUAS.

Il est donc clair que les cas considérés de $S_1$ sont ceux qui satisfont les conditions de [18]. La dernière déclaration de $S_1$ vient de la série d'inégalités suivant :

$$\Delta < 0 \iff -\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)} < \Gamma(A_1, A_2) < \sqrt{\det(A_1)\det(A_2)}$$

or

$$\begin{array}{rcl} -2\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)} \leq & Tr(A_1A_2) & \leq 2\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)} \\ -\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)} \leq & -\frac{1}{2}Tr(A_1A_2) & \leq \sqrt{\det(A_1)\det(A_2)} \end{array}$$

donc,

$$\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)} \geq \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(A_1)\mathrm{Tr}(A_2) - \mathrm{Tr}(A_1A_2)) \geq -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A_1A_2)$$

□

**Démonstration.** du Corollaire 3.12.

Pour prouver le Corollaire 3.12 dans le cas $\det([A_1, A_2]) > 0$, nous utilisons le point $1.b)$ du Lemme 3.14 en particulier nous avons :

$$\begin{array}{rcl} A_1A_2 & = & \begin{pmatrix} \tau_1 & 1 \\ 1 & \tau_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tau_2 - \sqrt{1-k^2} & k \\ k & \tau_2 + \sqrt{1-k^2} \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} \tau_1\tau_2 - \tau_1\sqrt{1-k^2} + k & \tau_1 k + \tau_2 + \sqrt{1-k^2} \\ \tau_2 - \sqrt{1-k^2} + \tau_1 k & k + \tau_1\tau_2 + \tau_1\sqrt{1-k^2} \end{pmatrix} \\ \mathrm{Tr}(A_1A_2) & = & 2\tau_1\tau_2 + 2k \\ & = & 2(\tau_1\tau_2 + k) \\ & \text{or} & -1 < k; 1 < \tau_1\tau_2 \Longrightarrow 0 = 1 - 1 < \tau_1\tau_2 + k \\ \mathrm{Tr}(A_1A_2) & = & 2(\tau_1\tau_2 + k) > 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \Gamma(A_1, A_2) & = & \frac{1}{2}(2\tau_1 \times 2\tau_2 - 2\tau_1\tau_2 - 2k) \\ & = & \tau_1\tau_2 - k > 0. \end{array}$$

Donc, les conditions de $S_1$ sont vérifiées. □

Dans le cas où le $\det([A_1, A_2]) = 0$, il est montré dans [11] que le système (2.13) admet une $FL$ commune quadratique par suite le système est GUAS.

Dans ce qui suit, nous supposerons toujours que $\det([A_1, A_2]) < 0$.

**Proposition 3.18.** *Soit* $\sigma \in [0, 1]$.

- *S'il existe* $\sigma_0 \in ]0, 1[$ *tel que* $\begin{cases} \Delta > 0 \\ \phi(\sigma_0) < 0 \end{cases}$ *alors le système (2.13) est instable.*
- *S'il existe* $\sigma_0 \in ]0, 1[$ *tel que* $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \phi(\sigma_0) = 0 \\ \Gamma(A_1, A_2) < 0 \end{cases}$ *alors le système uniformément stable mais pas GUAS.*

**Démonstration.**

Nous avons:

$$\begin{aligned} \phi(\sigma) &= \sigma^2 \det(A_1) + 2\sigma(1-\sigma)\Gamma(A_1, A_2) + (1-\sigma)^2 \det(A_2) \\ &= \sigma^2(\det(A_1) - 2\Gamma(A_1, A_2) + \det(A_2)) + 2\sigma(\Gamma(A_1, A_2) - \det(A_2)) + \det(A_2) \end{aligned}$$

Nous avons un trinôme en $\sigma$. Déterminons la solution $\sigma_0 \in [0, 1]$.

Posons $a_1 = \det(A_1) - 2\Gamma(A_1, A_2) + \det(A_2)$; $a_2 = \Gamma(A_1, A_2) - \det(A_2)$

$$\phi(\sigma) = 0 \Longleftrightarrow \sigma^2 a_1 + 2\sigma a_2 + \det(A_2) \quad = \quad 0$$

Calculons: $\Delta_1 = a_2^2 - a_1 \det(A_2)$; $\det(A_1) = \tau_1^2 - 1 > 0$; $\det(A_2) = \tau_2^2 + 1 > 0$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_2^2 - a_1 \det(A_2) \\ &= (\Gamma(A_1, A_2) - \det(A_2))^2 - \det(A_2)(\det(A_1) - 2\Gamma(A_1, A_2) + \det(A_2)) \\ &= \Gamma(A_1, A_2)^2 - 2\det(A_2)\Gamma(A_1, A_2) - \det(A_2)\det(A_1) + 2\det(A_2)\Gamma(A_1, A_2) \\ &= \Gamma(A_1, A_2)^2 - \det(A_1)\det(A_2) \end{aligned}$$

puisque :

$$\begin{aligned} \Gamma(A_1, A_2) \leq -\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)} &\Longleftrightarrow \Gamma(A_1, A_2)^2 \geq \det(A_1)\det(A_2) \\ &\Longleftrightarrow \Gamma(A_1, A_2)^2 - \det(A_1)\det(A_2) \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \Delta = 4\Delta_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Donc, on a deux solutions distinctes :

$$\sigma_1 \;=\; -\frac{a_2}{a_1} \text{ et } \sigma_2 \;=\; \frac{a_2}{a_1}$$

Déterminons le signe de ces solutions :

On a :

$$\det(A_1) + \det(A_2) \;=\; \tau_1^2 + \tau_2^2 - (\mathrm{sign}(\delta_{A_1}) + \mathrm{sign}(\delta_{A_2})).$$

Or si $\delta_{A_2} < 0$, alors $\delta_{A_1} > 0$ et réciproquement

donc,

$$\mathrm{sign}(\delta_{A_1}) + \mathrm{sign}(\delta_{A_2}) = 0$$

par suite,

$$\det(A_1) + \det(A_2) \;=\; \tau_1^2 + \tau_2^2$$

donc,

$$\begin{aligned}\Gamma(A_1,A_2)\leq -\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)} &\iff -2\Gamma(A_1,A_2)\geq 2\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)}\\ &\iff a_1 \geq \det(A_1)+\det(A_2)+2\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)}>0\\ \begin{cases}\Gamma(A_1,A_2)<0\\ -\det(A_2)<0\end{cases} &\iff a_2<0\end{aligned}$$

donc,

$$\sigma_1=\sigma_0=\frac{\det(A_2)-\Gamma(A_1,A_2)}{\det(A_1)+\det(A_2)-2\Gamma(A_1,A_2)}\in[0,1]$$

et,

$$\sigma_2<0$$

donc exclut.

Calculons maintenant $\phi(\sigma_0)$

$$\begin{aligned}\phi(\sigma_0) &= \sigma_0^2a_1+2\sigma_0a_2+\det(A_2)\\ &= \frac{(\det(A_2)-\Gamma(A_1,A_2))^2}{a_1^2}\times a_1+2\frac{\det(A_2)-\Gamma(A_1,A_2)}{a_1}a_2+\det(A_2)\\ &= \frac{a_2^2}{a_1}-2\frac{a_2^2}{a_1}+\frac{a_1\det(A_2)}{a_1}\\ &= \frac{a_1\det(A_2)-a_2^2}{a_1}\end{aligned}$$

or,

$$a_1\det(A_2) = \det(A_2)\det(A_1)-2\Gamma(A_1,A_2)\det(A_2)+(\det(A_2))^2$$

et,

$$-a_2^2 = 2\det(A_2)\Gamma(A_1,A_2)-(\det(A_2))^2-\Gamma(A_1,A_2)^2$$

donc,

$$\begin{aligned}\phi(\sigma_0) &= \frac{-(\Gamma(A_1,A_2)^2-\det(A_1)\det(A_2))}{a_1}\\ &= \frac{-\Delta}{4(\det(A_1)+\det(A_2)-\Gamma(A_1,A_2))}\leq 0\end{aligned}$$

Donc, il exit $\sigma_0\in]0,1[$ tel que $\phi(\sigma_0)<0$. En particulier dans le cas décrit par $S_2$ nous avons $\phi(\sigma_0)<0$, donc la matrice $\sigma_0A_1+(1-\sigma_0)A_2$ a une valeur propre réelle positive. Par suite, le système est instable. (voir remarque 1).

D'après la preuve du Lemme 3.16 $\Delta=0$ pour $\Gamma(A_1,A_2)=-\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)}<0$. Donc, nous avons la condition :

$$\begin{cases}\Delta=0\\ \Gamma(A_1,A_2)<0\end{cases}.$$

Ce qui implique que $\phi(\sigma_0)=0$ et donc le système (2.13) n'est pas GUAS. Dans ce cas, Baldé, Boscain et Masson ont montré dans [5] que le système est uniformément stable s'il admet la fonction suivante comme une $FL$ commune quadratique non stricte. □

**Lemme 3.19.** *[5] Si*

$$V(x)=V(x_1,x_2) \quad = \quad x_1^2+\frac{(\text{sign}(\delta_{A_1})\text{sign}(\delta_{A_2})-F^2)^2}{4F^2(\tau_1 F-\tau_2\text{sign}(\delta_{A_1}))^2}x_2^2$$

*est une FL commune quadratique non strict, alors le système (2.13) est uniformément stable.*

**Démonstration.** Les cas $S_2$ et $S_3$ du Théorème de stabilité découlent immédiatement de la Proposition 3.18 et du Lemme 3.19. □

La démonstration du cas $S_4$ découle de ce qui suit.

**Lemme 3.20.** *Soit* $\sigma\in[0,1]$ *si* $\Delta>0$ *alors* $\begin{cases}\Gamma(A_1,A_2)>\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)}\\ \text{Tr}(A_1,A_2)\leq -2\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)}\end{cases}$

**Démonstration.** Soient $A_1$ et $A_2$ sous la forme normale et $k<0$, alors nous avons :

$$\text{Tr}(A_1A_2) \quad = \quad F+\frac{\text{sign}(\delta_{A_1}\delta_{A_2})}{F}+2\tau_1\tau_2=2(k+\tau_1\tau_2)<0 \text{ et } |F|>1.$$

Or d'après la preuve du Lemme 3.17

$$\Delta\geq 0 \Longleftrightarrow \text{Tr}(A_1A_2)\leq -2\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)} \text{ou } \text{Tr}(A_1A_2)\geq 2\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)}$$

et celle du Lemme 3.16 montre que :

$$\Delta>0 \Longleftrightarrow \Gamma(A_1,A_2)<-\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)} \text{ ou } \Gamma(A_1,A_2)>\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)}$$

Comme,

$$\Gamma(A_1,A_2)=2(\tau_1\tau_2-k)>0$$

Donc on a :

$$\begin{cases}\Gamma(A_1,A_2)>\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)}\\ \text{Tr}(A_1,A_2)\leq -2\sqrt{\det(A_1)\det(A_2)}\end{cases}$$

□

Nous allons maintenant, présenter l'ensemble des points où les champs vectoriels $A_1x$ et $A_2x$ sont parallèles :

$$\mathcal{Z}=\{_1x\in\mathbb{R}^2, Q(x)=0\}$$

où $Q(x)=\det(A_1x,A_2x)$.

$$\begin{aligned}
Q(x) \quad &= \quad \begin{vmatrix}\tau_1x_1+x_2 & \tau_2x_1+Fx_2\\ x_1\text{sign}(\delta_{A_1})+\tau_1x_2 & x_1\frac{\text{sign}(\delta_{A_2})}{F}+x_2\tau_2\end{vmatrix}\\
q_1 \quad &= \quad \left(\frac{\tau_1\text{sign}(\delta_{A_2})}{F}-\tau_2\text{sign}(\delta_{A_1})\right)\\
q_2 \quad &= \quad \left(\frac{\text{sign}(\delta_{A_2})}{F}-F\,\text{sign}(\delta_{A_1})\right)\\
&= \quad x_1^2q_1+q_2x_1x_2+(\tau_2-\tau_1F)x_2^2
\end{aligned}$$

Le discriminant de la fonction quadratique $Q(x)$ coincide avec $\Delta$. Comme $\Delta > 0$, alors $\mathcal{Z}$ est une paire de lignes droites distinctes passant par l'origine.

**Définition 3.21. (Cas direct)** *Soit $x \in \mathcal{Z} \backslash \{0\}$. Nous disons que $\mathcal{Z}$ est direct en $x$ si les valeurs propres de $A_1x$ et $A_2x$ sont positives .*

**Définition 3.22. (Cas inverse)** *Soit $x \in \mathcal{Z} \backslash \{0\}$. Nous disons que $\mathcal{Z}$ est inverse en $x$ si les valeurs de $A_1x$ et $A_2x$ sont négatives.*

**Lemme 3.23.** *Si $\mathcal{Z}$ est direct en $x \in \mathcal{Z} \backslash \{0\}$, alors $\mathcal{Z}$ est direct tout au long de $\mathcal{Z} \backslash \{0\}$. De plus dans le cas $S_4$, $\mathcal{Z}$ est toujours direct.*

**Démonstration.** Soit $\mathcal{Z} = D_1 \cup D_2$ où $D_1$ et $D_2$ sont deux lignes droites distinctes passant par l'origine. Observons que si $x \in D_i$, alors $\exists \alpha_i \in \mathbb{R}$ tel que $A_2 A_1^{-1} A_1 x = A_2 x = \alpha_i A_i x$. Autrement dit, $\alpha_i$ est une valeur propre de $A_2 A_1^{-1}$ et de plus $A_1 x$ appartient à l'espace propre associée. Donc,

$$\alpha_1 \alpha_2 = \det(A_2 A_1^{-1}) = \frac{\det(A_2)}{\det(A_1)} > 0.$$

Ce qui implique: $\mathrm{sign}(\alpha_1) = \mathrm{sign}(\alpha_2)$ c'est à dire $\mathcal{Z}$ est soit direct soit inverse en tout point. D'autre part, nous avons:

$$\begin{aligned}
A_1^{-1} &= \frac{1}{\det(A_1)} \begin{pmatrix} \tau_1 & \frac{-\mathrm{sign}(\delta_{A_1})}{F} \\ -F & \tau_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\det(A_1)} \begin{pmatrix} 2\tau_1 - \tau_1 & \frac{-\mathrm{sign}(\delta_{A_1})}{F} \\ -F & 2\tau_1 - \tau_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\det(A_1)} \begin{pmatrix} 2\tau_1 & 0 \\ 0 & 2\tau_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tau_1 & \frac{\mathrm{sign}(\delta_{A_1})}{F} \\ F & \tau_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\det(A_1)} \left[ 2\tau_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tau_1 & \frac{\mathrm{sign}(\delta_{A_1})}{F} \\ F & \tau_1 \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{1}{\det(A_1)} (2\tau_1 I_d - A_1)
\end{aligned}$$

où $I_d$ est la matrice identité et donc dans le cas $S_4$, nous avons:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \alpha_2 = \mathrm{Tr}(A_2 A_1^{-1}) &= \mathrm{Tr}\left( \frac{1}{\det(A_1)} (2\tau_1 A_2 - A_2 A_1) \right) \\
&= \frac{1}{\det(A_1)} \mathrm{Tr}(2\tau_1 A_2 - A_2 A_1) \\
&= \frac{1}{\det(A_1)} (2\tau_1 \mathrm{Tr}(A_2) - \mathrm{Tr}(A_2 A_1)) \\
&= \frac{1}{\det(A_1)} (\mathrm{Tr}(A_1)\mathrm{Tr}(A_2) - \mathrm{Tr}(A_2 A_1)) \\
&= \frac{1}{\det(A_1)} (2\Gamma(A_1, A_2)) \\
&= \frac{2\Gamma(A_1, A_2)}{\det(A_1)} > 0
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\mathcal{Z}$ est direct.

$\square$

Soit $m_i$ la pente de $D_i$ pour $i=1,2$; alors si $v_i$ est un vecteur enjambant $D_i$, l'orientation du vecteur $A_1 v_i$ par rapport à la direction radiale est déterminée par le signe de la quantité

$$\operatorname{sign}(\det(A_1 v_i, v_i)) \;=\operatorname{sign}(m_i^2-\operatorname{sign}(\delta_{A_1}))$$

De même l'orientation du vecteur $A_2 v_i$ par rapport à la direction radiale est donnée:

$$\operatorname{sign}(\det(A_2 v_i, v_i))=\operatorname{sign}\left(\frac{m_i^2\operatorname{sign}(\delta_{A_2})-F^2}{F}\right) \;=\; \operatorname{sign}(F^2-m_i^2\operatorname{sign}(\delta_{A_2}))$$

**Lemme 3.24. (l'orientation de $\mathbf{A}_i\mathbf{v}_i$ par apport à la direction radiale)** *Si $\mathcal{Z}$ est direct c'est à dire $\Gamma(A_1,A_2)>0$, alors nous avons:*

$$\operatorname{sign}(F^2-m_i^2\operatorname{sign}(\delta_{A_2}))= \quad \operatorname{sign}(m_i^2-\operatorname{sign}(\delta_{A_1}))=+1$$

**Démonstration.** du Lemme 3.24

Comme $\Gamma(A_1,A_2)>0$ par les égalités précédentes nous obtenons:

$$\varepsilon=\operatorname{sign}(F^2-m_i^2\operatorname{sign}(\delta_{A_2}))=\operatorname{sign}(m_i^2-\operatorname{sign}(\delta_{A_1}))$$

- Si $\varepsilon=0$, nous sommes dans les conditions de $S_1$, alors

$$[A_1,A_2] \;=\; \begin{pmatrix} -\frac{(\operatorname{sign}(\delta_{A_1})\operatorname{sign}(\delta_{A_2})-F^2)}{F^2} & 0 \\ 0 & \frac{(\operatorname{sign}(\delta_{A_1})\operatorname{sign}(\delta_{A_2})-F^2)}{F^2} \end{pmatrix}$$

Comme $\varepsilon=0 \Longrightarrow \begin{cases} F^2-m_i^2\operatorname{sign}(\delta_{A_2})=0(b) \\ m_i^2-\operatorname{sign}(\delta_{A_1})=0(b_1) \end{cases}$

donc $(b_1)\Longrightarrow m_i^2=\operatorname{sign}(\delta_{A_1})$ en remplaçant $\operatorname{sign}(\delta_{A_1})$ par $m_i^2$ dans $[A_1, A_2]$, on trouve $[A_1,A_2]=0$

- Si $\varepsilon=-1$, alors nous avons:

$$\begin{aligned} \varepsilon \quad = \quad -1 \quad &\Longleftrightarrow \\ \begin{cases} \operatorname{sign}(F^2-m_i^2\operatorname{sign}(\delta_{A_2}))=-1 \\ \operatorname{sign}(m_i^2-\operatorname{sign}(\delta_{A_1}))=-1 \end{cases} &\Longleftrightarrow \begin{cases} F^2-m_i^2\operatorname{sign}(\delta_{A_2})<0 \\ m_i^2-\operatorname{sign}(\delta_{A_1})<0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} 0<\frac{F^2}{m_i^2}<\operatorname{sign}(\delta_{A_2})=1\text{car}\, m_i^2\neq 0 \\ 0<m_i^2<\operatorname{sign}(\delta_{A_1})=1 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow F^2<m_i^2<1 \end{aligned}$$

Ce qui est impossible car $|F|>1$. $\square$

Par conséquent, les vecteurs $A_i x$ se dirigent dans le sens des aiguilles d'une montre à tout point de $x\in\mathcal{Z}\backslash\{0\}$. Cette propriété permet de définir l'outil principal pour vérifier la stabilité de (2.13) dans les conditions de $S_4$. Puisque nous avons les conditions de $S_4$ et les formes normales du Lemme 3.14, faisons l'analyse de la pire trajectoire.

**Définition 3.25. (Pire trajectoire)** *Soit $x_0 \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$. On appelle pire trajectoire $\gamma_{x_0}$, la trajectoire du système ( 2.13) issue de $x_0$ telle qu'à chaque instant t, le vecteur $\gamma_{x_0}^{'}(t)$forme une petite angle (en valeur absolue) avec la direction radiale.*

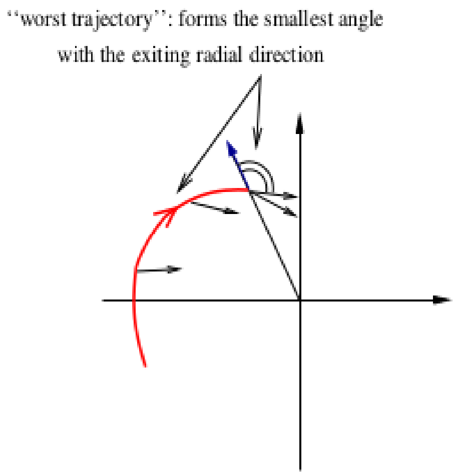


**Figure 3.1.**

La figure 3.1 exprime graphiquement la signification de la définition précédente. Il est clair que la pire trajectoire tourne toujours dans le sens des aiguilles d'une montre autour de l'origine quand $\delta_{A_i} \leq 0$ pour tout $i \in \{0, 1\}$.

Si $\delta_{A_i} > 0$, pour $i = 1, 2$ alors déterminons:

- les vecteurs propres de $A_1$.

  Commençons à chercher les valeurs propres de $A_1$ : $\alpha_1$,$\alpha_2$

$$\begin{vmatrix} \tau_1 - \alpha & 1 \\ 1 & \tau_1 - \alpha \end{vmatrix} = (\tau_1 - \alpha)^2 - 1 \iff (\tau_1 - \alpha)^2 - 1 = 0$$
$$\iff \alpha_1 = 1 + \tau_1; \alpha_2 = -1 + \tau_1.$$

  Déduisons leurs vecteurs propres correspondants :

$$(A_1 - \alpha_1 I_2)x = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

  Donc $E_{\alpha_1} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon -x_1 + x_2 = 0\}$.

$$\text{Soit } x \in E_{\alpha_1} \Longrightarrow x = (x_1, x_2) \text{tel que} \quad -x_1 + x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = x_1 \quad \text{par suite}$$
$$x = (x_1, x_1) = x_1(1, 1)$$

  Avec le même raisonnement on a $x = x_1(1, -1)$ pour $\alpha_2$. Donc, les vecteurs propres de $A_1$ sont $(1, 1)^T$ et $(1, -1)^T$.

- les vecteurs propres de $A_2$

De manière analogue, nous avons les vecteurs propres de $A_2$ sont $(1,F)^T$ et $(1,-F)^T$. Donc $m_1 m_2 < 0$.

Or d'après le Lemme 3.24, on a:

$$\begin{cases} m_i^2 - 1 > 0 \\ F^2 - m_i^2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} m_i^2 > 1 \\ F^2 > m_i^2 \end{cases} \iff F < m_2 < -1 < 1 < m_1 < -F$$

Par conséquent, $D_1$ et $D_2$ divisent l'espace en quatre composants connectés, chaque intersection de l'espace propre est formé exactement par les matrices $A_1$ et $A_2$. Ceci implique que, la pire trajectoire tourne dans le sens des aiguilles d'une montre autour de l'origine. Cette trajectoire est la concaténation des courbes intégrales de $A_2 x$ des points de $D_1$ aux points de $D_2$ et les courbes intégrales de $A_1 x$ des points de $D_2$ aux points de $D_1$ (voir Figure 3.2).

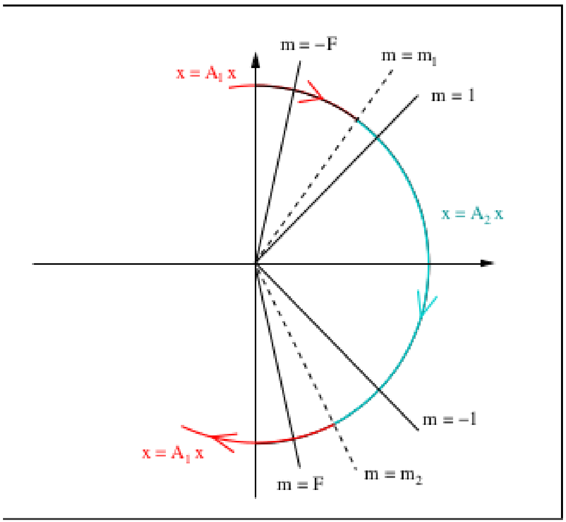


**Figure 3.2.**

**Théorème 3.26.** *[4][5]***(Stabilité de la pire trajectoire)**
*Soit $\gamma_{x_0}(.)$la pire trajectoire du système (2.13) où $x_0 \in D_i$ et $T > 0$ tel que $x_1 = \gamma_{x_0}(T)$ soit le premier point d'intersection entre la pire trajectoire et $D_i$. Alors,*

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \gamma_{x_0}(t) = 0 \iff \mathcal{R} = \frac{|x_1|}{|x_0|} < 1$$

*Dans ce cas le système est GUAS (voir Figure 3.3 (a)).*

$$\gamma_{x_0} \,\text{periodique} \iff \mathcal{R} = \frac{|x_1|}{|x_2|} = 1.$$

*Dans ce cas le système est uniformément stable, mais pas GUAS (voir Figure 3.3 (b)).*

$$\gamma_{x_0} \,\text{explose si et seulement si}\, \mathcal{R} = \frac{|x_1|}{|x_0|} > 1 \text{ (voir Figure 3.3 (c)).}$$

*Dans ce cas le système est instable.*

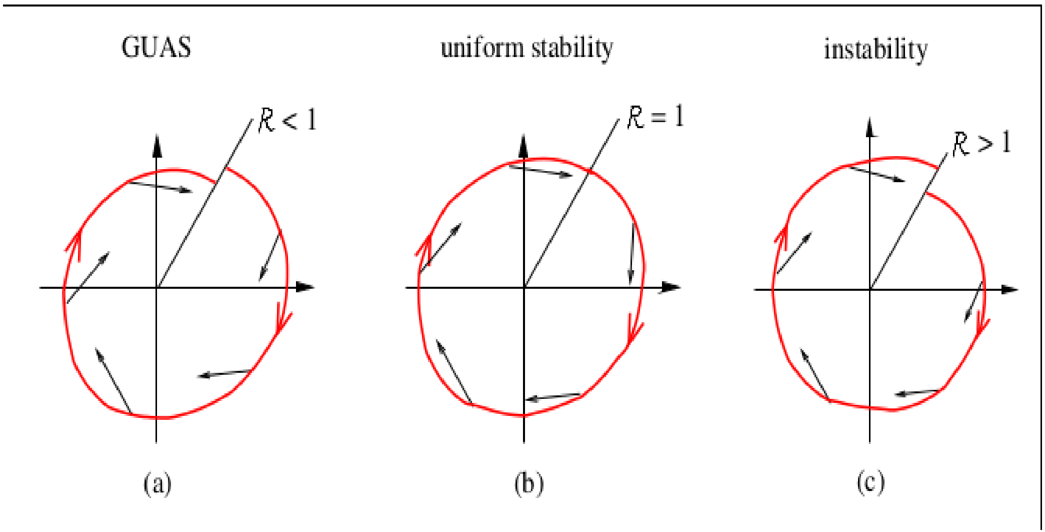


**Figure 3.3.**

# Conclusion et perspectives

Le travail présenté dans ce mémoire m'a permis de m'initier et de comprendre les systèmes hybrides en général et les systèmes linéaires commutés dans le plan en particulier. Nous y reprenons et de manière détaillée les conditions nécessaires et suffisantes de la stabilité sur les matrices de Hurwitz quelle que soit la loi de commutation décrites dans l'article [4] de Balde, Boscain et Masson . Pour ce qui concerne les perspectives, il serait utile de regarder le même problème en dimension 3 où aucun résultat de ce type n'est disponible.

# Bibliographie


**[1]** D. Angeli, B.Ingalls, E.D. Sontag, and Y.Wang, Uniform global asymptotic stability of differential inclusions, J.Dynam. Control Systems 10 (2004), 391–412.

**[2]** A. A. Agrachev and D. Liberzon, Lie-algebraic stability criteria for switched system, SIA J.Control Optim. 40 (2001), 253–269.

**[3]** Romain Bourdais, Une contribution à la modelisation et à la commande des systèmes nonlineaires à commutation, vol. Thèse, Ecole centrale de Lille., France, 2011.

**[4]** U. Boscain. Stability of planar switched systems: the linear single input case. SIAM J. Control Optim., 41(1):89–112(electronic), 2002.

**[5]** M. Balde and U. Boscain. Stability of planar switched systems: the nondiagonalizable case. Commun. Pure Appl.Anal., 7(1):1–21, 2008.

**[6]** W. Hahn. Theory and Application of Liapunov's Direct Method. Prentice-Hall inc., 1963. N.J.

**[7]** Mancilla-Aguilar J. and Garcia R., A converse lyapunov theorem for nonlinear switched sys-tems., Systems and Control Letters 41 (2000).

**[8]** M. Johansson and A. Rantzer. Computation of piecewise quadratic Lyapunov function for hybrid systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 43 :555–559, 1998. 23

**[9]** J. J. Slotine and L. Weiping. Applied Nonlinear Control. Prentice Hall, 1991.

**[10]** H. K. Khalil. Nonlinear Systems. NJ 07458. Prentice-Hall, Upper Saddle River, 1996.

**[11]** D. Liberzon. Switching in systems and control. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhauser Boston Inc., Boston, MA, 2003.

**[12]** J. L. Mancilla-Aguilar. A condition for the stability of switched nonlinear systems. IEEE Trans. Automat.Control, 45:2077–2079, 2000.

**[13]** D. Liberzon, J. P. Hespanha, and A. S. Morse. Stability of switched systems : a Lie-algebraic condition. Systems Control Lett., 37(3) :117–122, 1999. 24

**[14]** P. Mason, U. Boscain, and Y. Chitour. Common polynomial Lyapunov functions for linear switched systems. SIAM J. Control Optim., 45(1):226–245 (electronic), 2006.

**[15]** Y. Mori, T. Mori, and Y. Kuroe. A solution to the common Lyapunov function problem for continuous-time systems. In 36th IEEE Conference on Decision and Control, pages 3530–3531, San Diego, USA, 1997. 23

**[16]** R.N. Shorten and K.S. Narendra. Necessary and sufficient conditions for the existence of a common quadratic Lyapunov function for two stable secondorder linear time-invariant systems. In In Proc. of the 1999 Amer. Contr. Conf., pages 1410–1414, 1999.

**[17]** K. S. Narendra and J. Balakrishnan. A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting A-matrices. IEEE Trans. Automat. Control, 39:2469–2471, 1994.

**[18]** R. Shorten and K. Narendra. Necessary and sufficient conditions for the existence of a common quadratic Lyapunov function for two stable second order linear time–invariant systems. In Proceedings 1999, American Control Conf., pages 1410–1414, 1999.

**[19]** R. Shorten and K. Narendra. A result on common quadratic Lyapunov functions. IEEE Trans. Automat. Control, 48(1) :110–113, 2003. 24

**[20]** R. Shorten and K. Narendra. Necessary and sufficient conditions for the existence of a common quadratic Lyapunov function for M stable second order linear time-invariant systems. In Proceedings of the 2000 American Control Conference., 2000. 24

**[21]** W. P. Dayawansa and C. F. Martin. A converse Lyapunov theorem for a class of dynamical systems which undergo switching. IEEE Trans. Automat. Control, 44(4):751–760, 1999.

**[22]** M. Wicks, P. Peleties, and R. De Carlo. Construction of piece-wise Lyapunov functions for stabilizing switched systems. In 33rd IEEE Conference on Decision and Control, pages 3492–3497, Orlando, USA, 1994. 18

**[23]** M. Wicks, P. Peleties, and R. DeCarlo. Switched controller synthesis for the quadratic stabilization of a pair of unstable linear systems. Eur. J. Contr., 4 :140–147, 1998. 18

**[24]** Z. Sun, S. Ge, and T. Lee. Controllability and reachability criteria for switched linear control systems. Automatica, 38 :775–786, 2002.

**[25]** X. Xu and P.J. Antsaklis. Stabilization of second-order LTI switched systems. International Journal of Control, 73(14) :1261–1279, 2000.